Colección de problemas resueltos para el curso de dinámica

T. David Navarrete Gónzalez

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Colección de problemas resueltos para el curso de dinámica

T. David Navarrete Gónzalez

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BASICAS
AREA DE FISICA

Portada:
Modesto Serrano Ramírez

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco

Av. San Pablo No. 180 Col. Reynosa Tamaulipas
Deleg. Azcapotzalco. 02200
México, D.F
Tel. 724-4422

3a. impresión, 1996

Impreso en México

* * * PROBLEMA # 1 * * *

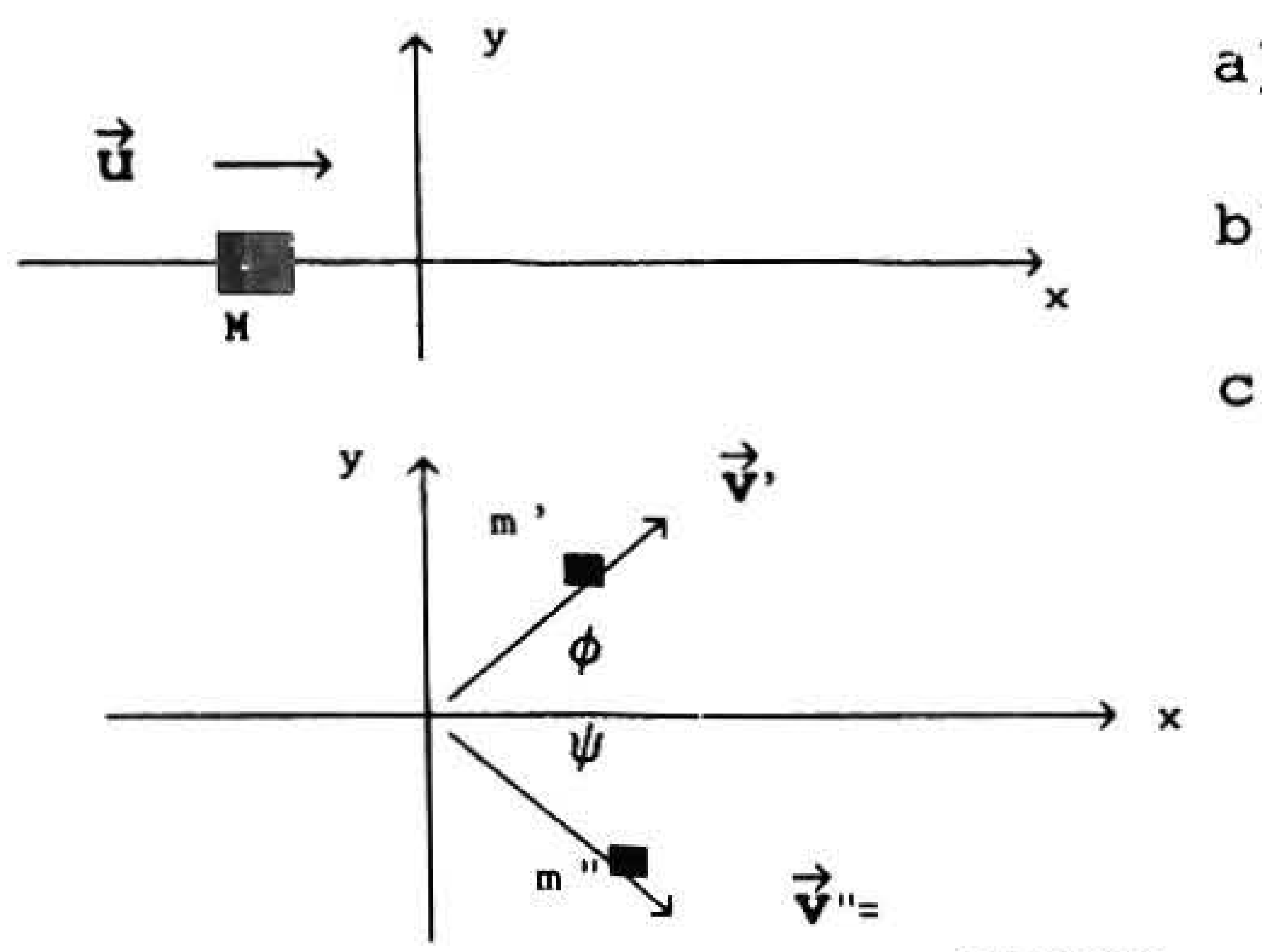
Una partícula de masa **M** se mueve libremente con velocidad **u** , y sufre una explosión dividiéndose en dos partículas de masas **m'** **m''** como se muestra en la figura. CALCULAR :

a) Las velocidades $\vec{v}'$ y $\vec{v}''$;

b) La velocidad del Centro de masas de las partículas **m'** y **m''**;

c) El cambio experimentado por la energía cinética del sistema.

FIGURA



INCOGNITAS	DATOS
a) $\vec{v}'$, $\vec{v}''$	$M = 2.1\text{x}10^3$ k
b) $\vec{v}_{c.m.}$	$m' = 1.4\text{x}10^3$ k
c) $\Delta\ E_{cin.sist.}$	$m'' = 0.7\text{x}10^3$ k
	$u = 1200$ m/s
	$\phi = 45^\circ$
	$\psi = 30^\circ$

SOLUCION

El principio de conservación del momento lineal establece que:

$$\vec{P}_i^{\,Sist} = \vec{P}_f^{\,Sist}$$

(Cuando la fuerza externa es cero)

$$\vec{P}_i^{\,Sist} = \begin{pmatrix} p_x^i \\ p_y^i \\ p_z^i \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M\,u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \begin{matrix} p_x^i = M\,u \\ p_y^i = 0 \\ p_z^i = 0 \end{matrix}$$

$$\vec{P}_f^{\,Sist} = \begin{pmatrix} p_x^f \\ p_y^f \\ p_z^f \end{pmatrix} = m' \begin{pmatrix} v_x^{f\,\prime} \\ v_y^{f\,\prime} \\ v_z^{f\,\prime} \end{pmatrix} + m'' \begin{pmatrix} v_x^{f\,\prime\prime} \\ v_y^{f\,\prime\prime} \\ v_z^{f\,\prime\prime} \end{pmatrix} = m'\ \vec{v}_f{}' + m''\ \vec{v}_f{}'' \quad \Rightarrow$$

$$p_x^f = m'\ v_x^{f\,\prime} + m''\ v_x^{f\,\prime\prime}$$

$$p_y^f = m'\ v_y^{f\,\prime} + m''\ v_y^{f\,\prime\prime}$$

$$p_z^f = m'\ v_z^{f\,\prime} + m''\ v_z^{f\,\prime\prime}$$

$$M\,u = m'\,v_x^{f'} + m''\,v_x^{f''}$$

$$0 = m'\,v_y^{f'} + m''\,v_y^{f''}$$

$$0 = m'\,v_z^{f'} + m''\,v_z^{f''}$$

$$\begin{pmatrix} v_x^{f'} \\ v_y^{f'} \\ v_z^{f'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'\cos\phi \\ v'\,\mathrm{sen}\,\phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} v_x^{f''} \\ v_y^{f''} \\ v_z^{f''} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v''\cos\psi \\ -\,v''\,\mathrm{sen}\,\psi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo las componentes de las velocidades en las ecuaciones encontradas, anteriormente, se tiene :

$$\begin{aligned} M\,u &= m'\,v'\cos\phi + m''\,v''\cos\psi \\ 0 &= m'\,v'\,\mathrm{sen}\,\phi - m''\,v''\,\mathrm{sen}\,\psi \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Resolvamos el sistema de ecuaciones, y determinemos v' & v''.

$$m'\,v'\,\mathrm{sen}\,\phi = m''\,v''\,\mathrm{sen}\,\psi$$

$$v' = \left(\frac{m''\,\mathrm{sen}\,\psi}{m'\,\mathrm{sen}\,\phi}\right) v''$$

$$M\,u = m'\left[\frac{m''\,\mathrm{sen}\,\psi}{m'\,\mathrm{sen}\,\phi}\right] v''\cos\phi + m''\,v''\cos\psi$$

$$M\,u = m''\,v''\,\mathrm{sen}\,\psi\,\mathrm{cotg}\,\phi + m''\,v''\cos\psi$$

$$v'' = \frac{M\,u}{m''\,\mathrm{sen}\psi\,\mathrm{cotg}\phi + m''\cos\psi}$$

Sustituyendo v'' en, la expresión encontrada de v', se determina v':

$$v' = \frac{m''\,\mathrm{sen}\,\psi}{m'\,\mathrm{sen}\,\phi}\left[\frac{M\,u}{m''\,(\mathrm{sen}\psi\,\mathrm{cotg}\phi + \cos\psi\,)}\right]$$

$$v' = \frac{M}{m'}\left[\frac{1}{\mathrm{sen}\,\phi\,(\mathrm{cotg}\,\phi + \mathrm{cotg}\,\psi)}\right] u$$

En las expresiones encontradas, se sustituyen los datos numéricos del problema; para determinar así los valores asociados a las magnitudes de las velocidades v' & v''.

La respuesta al inciso b), se determinará en base al principio de conservación del momento lineal.

$$\vec{P}_i^{\,Sist} = \vec{P}_f^{\,Sist}$$

$$\vec{P}_i^{\,c.m.} = \vec{P}_f^{\,c.m.}$$

$$\vec{P}_i^{\,c.m} = M\,\vec{v}_i^{\,c.m.} = M\,\vec{u}$$

$$\vec{P}_f^{c.m.} = M\,\vec{v}_f^{c.m.} = m'\,\vec{v}' + m''\,\vec{v}''$$

$$M\,\vec{v}_i^{c.m.} = m'\,\vec{v}' + m''\,\vec{v}'' = M\,\vec{u} = M\,\vec{v}_f^{c.m.}$$

$$\vec{v}_f^{c.m.} = \vec{u}$$

$$\vec{v}_f^{c.m.} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2\times10^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m/s.}$$

Para responder el inciso c), expresémos las energías cinéticas antes y después de que ocurre la separación.

$$E_{cin.}^{i} = 1/2\ M\ u^2 \quad , \quad E_{cin.}^{f} = 1/2\ m'\ v'^2 + 1/2\ m''\ v''^2$$

Luego, entonces, el cambio en la energía es:

$$\Delta\ E_{cin.} = E_{cin.}^{f} - E_{cin.}^{i} = 1/2\left[\ m'v'^2 + m''v''^2 - M\ u^2\right]$$

En esta expresión se sustituyen los valores encontrados en el inciso a). Con lo cual se determina , el valor numérico del cambio experimentado por la energía cinética.

a) $v' = 931.74$ m/s, $v'' = 1317.69$ m/s b) $v_{c.m.} = 1200$ m/s.

c) $\Delta E_{cin.} = 2.966\times10^8$ J.

Observacion : Las velocidades , por ser cantidades vectoriales ,

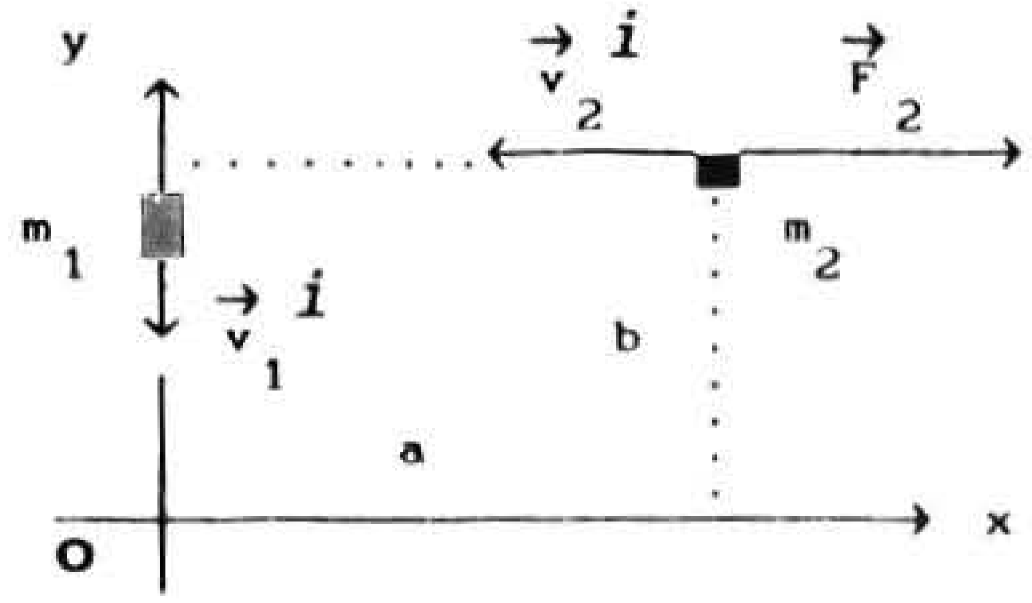
se deberian expresar como tales , i,e.

$$\vec{v}' = \begin{pmatrix} 931.74 \cos 45^\circ \\ 931.74 \operatorname{sen} 45^\circ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 658.84 \\ 658.84 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{v}'' = \begin{pmatrix} 1317.69 \cos 30^\circ \\ 1317.69 \operatorname{sen} 30^\circ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 988.27 \\ 658.84 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{v}_{c.m.} = \begin{pmatrix} 1200 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m/s.}}$$

* * * PROBLEMA # 2 * * *

Para el sistema de dos partículas mostrado en la figura, encuéntrense las siguientes cantidades: La aceleración y velocidad del centro de masa, la cantidad de movimiento angular respecto del cento de masa. Este último referido a la situación que se indica en la figura.



DATOS	INCOGNITAS
$F_2 = 20$ N.	$\vec{a}_{c.m} = ?$
$m_1 = 3$ k.	$\vec{v}_{c.m.} = ?$
$m_2 = 2$ k.	$\vec{L}_{c.m.} = ?$
$a = 0.5$ m.	
$b = 0.2$ m.	
$v_1^{i} = 4$ m/s	$v_2^{1} = 2$ m/s

SOLUCION

Las primeras dos preguntas son contestadas mediante la segunda ley de Newton.

$$\vec{F}_{TOT} = m_{SIST}\ \vec{a}_{C.M.}$$

La respuesta a la pregunta de cual es la cantidad de movimiento angular respecto al centro de masa, está dada por la expresión que define al momento angular.

$$\vec{L}^{c.m.} = \vec{r}_1{}' \times \vec{p}_1{}' + \vec{r}_2{}' \times \vec{p}_2{}' = \mu\, \vec{r}_{rel} \times \vec{v}_{rel}$$

$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} F_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_{c.m.} = \frac{1}{m_{sist}}\ \vec{F}_{tot} = \frac{1}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} F_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{F_2}{m_1 + m_2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_{c.m.} = \frac{d\,\vec{v}_{c.m.}}{d\,t} \quad \therefore \quad \vec{v}_{c.m.}(t) = \int_0^t \vec{a}_{c.m.}\, dt + \vec{v}_{c.m.}(t=0)$$

$$\vec{v}_{c.m.}(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \vec{v}_{c.m.}(t=0) = \begin{pmatrix} 4t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{v}_{c.m.}(t=0)$$

Esta expresión nos determina, la velocidad del centro de masa, en cualquier instante de tiempo; quedando por determinarse aún la velocidad inicial con que se mueve el centro de masa.

$$\vec{v}_{c.m.}(t=0) = \frac{m_1\,\vec{v}_1^{\,i} + m_2\,\vec{v}_2^{\,i}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\begin{pmatrix} 0 \\ -v_1^{\,i} \\ 0 \end{pmatrix} + m_2\begin{pmatrix} -v_2^{\,i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}_{c.m.}(t=0) = \begin{bmatrix} \dfrac{-m_2\,v_2^{\,i}}{m_1 + m_2} \\ \dfrac{-m_1\,v_1^{\,i}}{m_1 + m_2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ -12/5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

así que, sustituyendo en la ecuación encontrada, para la velocidad del centro de masa en cualquier instante de tiempo, se tiene :

$$\vec{v}_{c.m.}(t) = \begin{bmatrix} 4t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4/5 \\ -12/5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4t-4/5 \\ -12/5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\vec{a}_{c.m.} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} m/s^2} \qquad \boxed{\vec{v}_{c.m.}(t) = \begin{pmatrix} 4t - 4/5 \\ -12/5 \\ 0 \end{pmatrix} m/s}$$

Ahora determinaremos la cantidad de movimiento angular respecto al centro de masa del sistema. Para lo cual haremos uso de la expresión escrita al principio de la solución.

$$\vec{L}^{c.m.} = \mu\,\vec{r}_{rel.} \times \vec{v}_{rel} = \frac{m_1\,m_2}{m_1 + m_2}\,(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

Así que entonces el momento angular inicial , se expresa como:

$$\vec{L}^{c.m.}_{inic.} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,(\vec{r}_2^{\,i} - \vec{r}_1^{\,i}) \times (\vec{v}_2^{\,i} - \vec{v}_1^{\,i})$$

donde los vectores $\vec{r}_1^{\,i}$, $\vec{r}_2^{\,i}$, $\vec{v}_1^{\,i}$ y $\vec{v}_2^{\,i}$ están dados, por las *condiciones iniciales* del problema.

$$\vec{r}_1^{\,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2^{\,1} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1^{\,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -v_1^{\,1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2^{\,1} = \begin{pmatrix} -v_2^{\,1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con los cuales se construyen, fácilmente, los términos que aparecen en la expresión del momento angular.

$$\vec{r}_2^{\,1} - \vec{r}_1^{\,1} = \begin{pmatrix} a \\ b - b \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{v}_2^{\,1} - \vec{v}_1^{\,1} = \begin{pmatrix} -v_2^{\,1} \\ +v_1^{\,1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así que :

$$\vec{r}_2^{\,1} - \vec{r}_1^{\,1} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{v}_2^{\,1} - \vec{v}_1^{\,1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego entonces, finalmente, el momento angular queda como lo siguiente;

$$\vec{L}_1^{\,c.m.} = \frac{3(2)}{5} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 6/5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12/5 \end{pmatrix} \text{kg m}^2\text{/s}$$

Por completéz, se determina también, el vector de posición del centro de masa inicial del sistema, expresado por

$$\vec{r}_1^{\,c.m.} = \frac{m_1 \vec{r}_1^{\,1} + m_2 \vec{r}_2^{\,1}}{m_1 + m_2} = 3/5 \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + 2/5 \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5\ a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{r}_1^{\,c.m.} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m.}}$$

* * * PROBLEMA # 3 * * *

En el sistema mostrado en la figura se tienen dos cuerpos, moviéndose sobre una superficie horizontal sin fricción; de tal manera que experimentan una colisión elástica, por medio de un resorte que se encuentra sujeto al cuerpo de masa m . Las velocidades, antes de que ocurre la colisión, son $\vec{v}$ y $\vec{v}$ respectivamente. **a)** Cual es la máxima compresión que experimenta el resorte, si su constante elástica tiene un valor de $K = 7400$ N/m .
b) Cuales son las velocidades que adquieren los cuerpos después de que el resorte recupera su longitud no deformada.

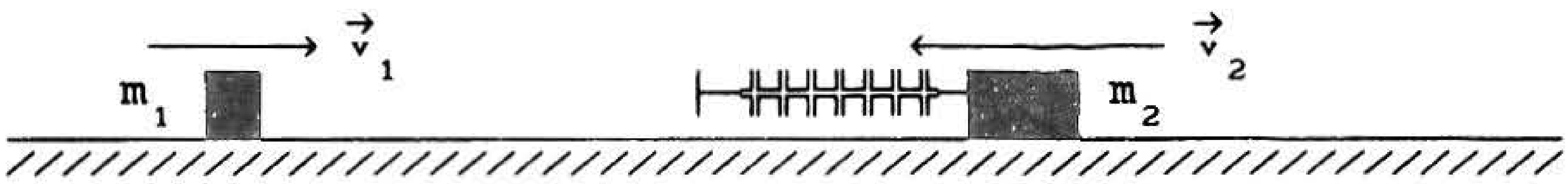


FIGURA *(Antes de la colision)*

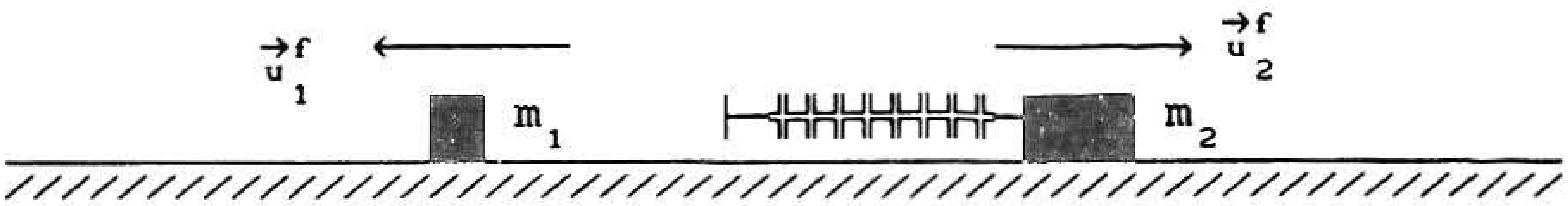


FIGURA *(Despues de la colision)*

SOLUCION

DATOS	INCOGNITAS
$v_1^i = 6$ m/s	a) $X_{max} = ?$
$v_2^i = 3$ m/s	b) $u_1^f = ?$
$m_1 = 1$ kg	$u_2^f = ?$
$m_2 = 2$ kg	
$K = 7400$ N/m	

Debido a que la colisión es de tipo elástico, se cumplen los principios de conservación, de la energía así como el del momento lineal total.

$$E^{inicial}_{sist.} = E^{final}_{sist.}$$

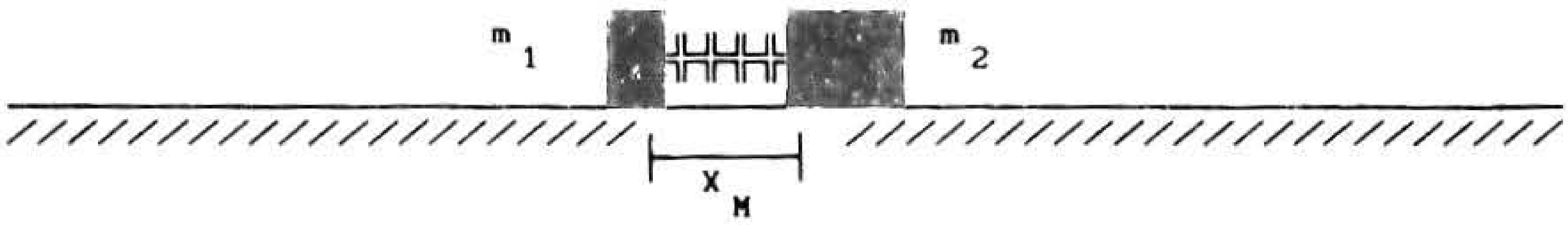
Debido a que el movimiento es en un plano horizontal la energía potencial gravitacional es para ambas situaciones (antes y despues de la colision) la misma, así que entonces la energía del sistema antes y después de la colisión esta formada por la energía cinética de los cuerpos como la energía potencial elástica del resorte.

$$E^{inicial} = E^{(1)\,i}_{cin.} + E^{(2)\,i}_{cin.} + E^{i}_{pot.elast.}$$

$$E^{final} = E^{(1)\,f}_{cin.} + E^{(2)\,f}_{cin.} + E^{f}_{pot.elast.}$$

Para determinar la máxima compresión experimentada por el resorte se deberá analizar, la situación intermedia, donde este se comprime al máximo.

$$\vec{v}_1^{\,f} = \vec{0} \qquad \vec{v}_2^{\,f} = \vec{0}$$



En dicha situación, ambos cuerpos quedarán en reposo por un instante de tiempo, para después recobrar nuevamente su movimiento. *Esta afirmacion se basa en el hecho de que el momento lineal del centro de masa inicialmente es igual a cero, y por la ley de conservacion del momento lineal, tambien en cualquier instante de tiempo posterior, en particular en el instante de maxima compresion.* $\vec{P}^{\,i}_{c.m.} = \vec{P}^{\,f}_{c.m.} = \vec{0}$, ($\vec{P}_{c.m.} = \vec{0}$ $\forall$ t) .

Así que por la conservación de la energía se tiene

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^{i\,2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{i\,2} + \frac{1}{2} k X_i^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^{f\,2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{f\,2} + \frac{1}{2} k X_f^2$$

Donde las velocidades iniciales son aquéllas con que se mueven los cuerpos antes de comenzar a comprimir el resorte, y las velocidades finales son aquellas cuando el resorte está comprimido al máximo. Así mismo X representa la compresión experimentada por el resorte durante el proceso en estudio.

Así que, entonces, tenemos: $X_i = 0$, $X_{max,comp} = X_f$, $v_1^f = 0 = v_2^f$.

Luego entonces el principio de conservación de la energía se expresará mediante lo siguiente,

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} k X^2_{max.comp}$$

$$X_{max.comp} = \sqrt{\frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}{k}}$$

$$X_{max\ comp} = 0.0854242 \text{ m.}$$

Ahora bien, ésta energía potencial adquirida por el resorte, al estar comprimido hasta el máximo; se transformará nuevamente en energía cinética cuando el resorte se extienda hasta recobrar su forma original.

$$E'^{\,inic.} = E'^{\,final}$$

$$\frac{1}{2}\, k\, x^2_{max.comp} = \frac{1}{2}\, m_1 u_1^{f\,2} + \frac{1}{2}\, m_2 u_2^{f\,2}$$

Donde $\vec{u}_1^{\,f}$ y $\vec{u}_2^{\,f}$ son las velocidades adquiridas por los cuerpos después de la recuperación del resorte.

Por lo que, se puede hacer uso del principio de conservación del momento lineal total del sistema y, será expresado como :

$$\vec{P}^{i} = \vec{P}^{f}$$

$$m_1\, \vec{u}_1^{\,f} + m_2\, \vec{u}_2^{\,f} = m_1\, \vec{v}_1^{\,i} + m_2\, \vec{v}_2^{\,i}$$

$$E^{i}_{cin} = \frac{1}{2}\, m_1\, v_1^{i\,2} + \frac{1}{2}\, m_2\, v_2^{i\,2} = \frac{1}{2}\, m_1\, u_1^{f\,2} + \frac{1}{2}\, m_2\, u_2^{f\,2} = E^{f}_{cin}$$

De estas ecuaciones se requiere determinar las velocidades finales $\vec{u}_1^{\,f}$ y $\vec{u}_2^{\,f}$, las cuales están expresadas por:

$$\vec{u}_1^{\,f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, \vec{v}_1^{\,i} + \frac{2\, m_2}{m_1 + m_2}\, \vec{v}_2^{\,i}$$

$$\vec{u}_2^{\,f} = \frac{2\, m_1}{m_1 + m_2}\, \vec{v}_1^{\,i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\, \vec{v}_2^{\,i}$$

Sustituyendo los datos del problema, se determinan, los valores numéricos de las velocidades después del choque.

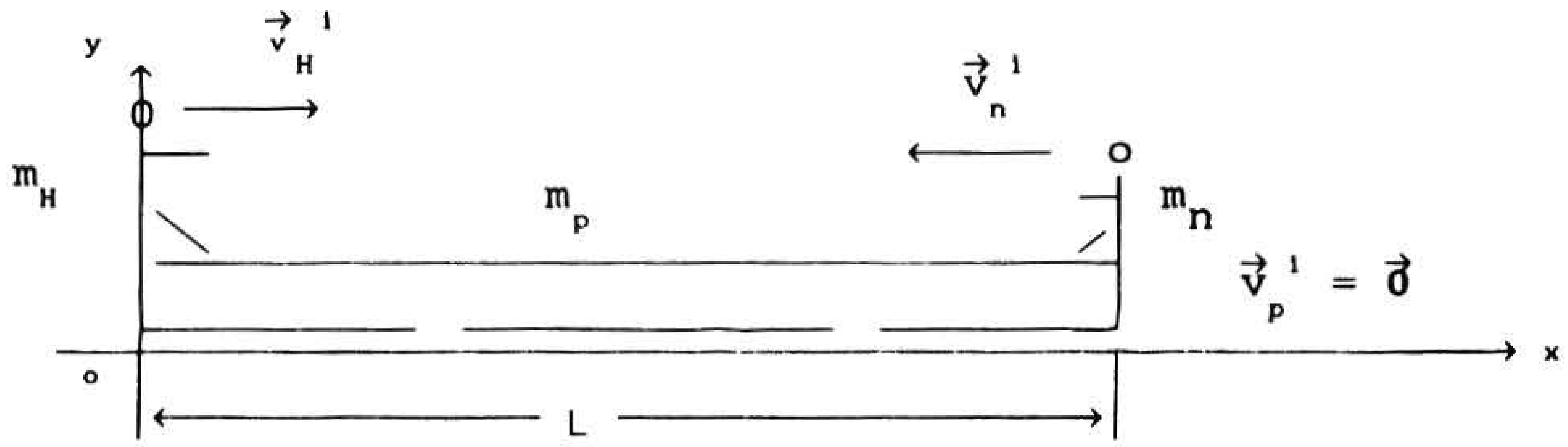
$$\vec{u}_1^{\,f} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{4}{3} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m/s}$$

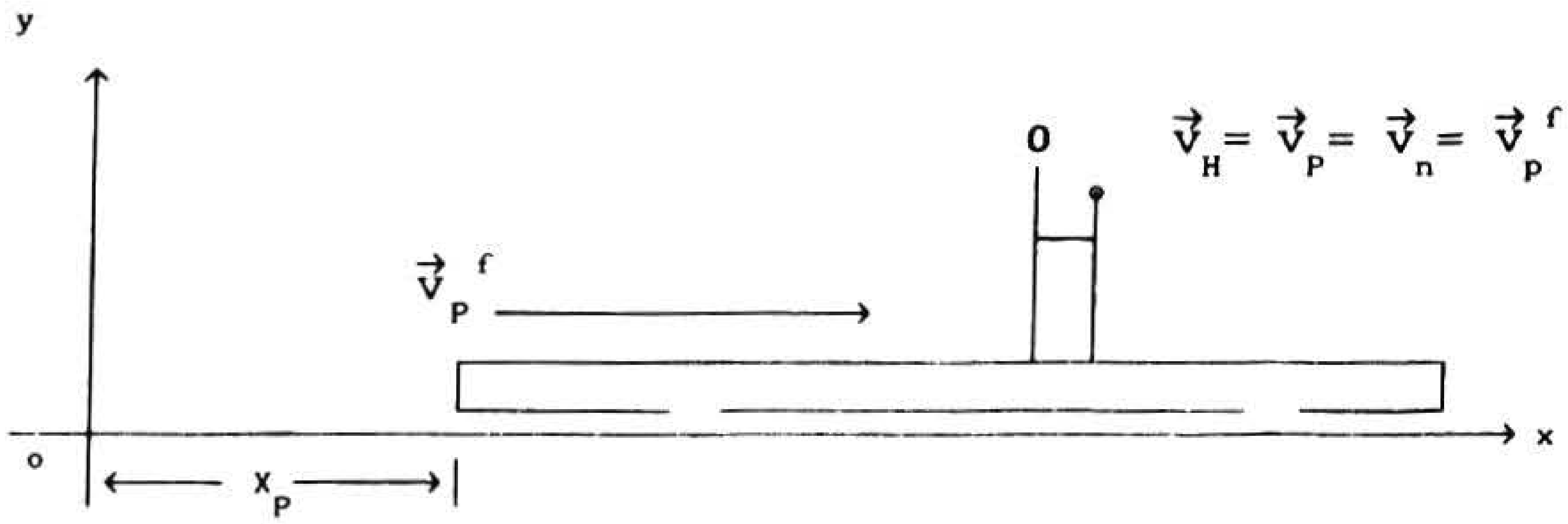
$$\vec{u}_2^{\,f} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m/s}$$

Observacion : las expresiones usadas para determinar las velocidades $\vec{u}_1^{\,f}$ y $\vec{u}_2^{\,f}$ solo son aplicables cuando la colision ocurre en una sola dimension .

* * * PROBLEMA # 4 * * *

En una plataforma inicialmente inmóvil de longitud L , se colocan dos personas en los extremos de la misma, un hombre y un niño; y entonces el niño corre hacia el hombre y el hombre hacia el niño. Cual es desplazamiento que experimentó la plataforma en el instante en que ellos se juntan?. Se sabe que el hombre corre a una velocidad que es el triple de la del niño y que la masa de la plataforma es 10 veces la masa del hombre y la de este es el doble de la masa del niño.





DATOS

$v_H = 3\ v_n$

$m_P = 10\ m_H$

$m_H = 2\ m_n$

INCOGNITAS

$x = ?$

$v_P = ?$

SOLUCION

El problema se resuelve bajo la condición de que no actúen fuerzas externas sobre el sistema, formado por la plataforma , el hombre , y el niño. La fricción entre la plataforma y el piso es despreciable. De acuerdo con el principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal se tiene:

$$\vec{P}^{\,inic.}_{Sistema} = \vec{P}^{\,final}_{Sistema}$$

El momento del sistema está formado de tres términos, el momento del hombre, el momento del niño y el momento de la plataforma. Así que entonces, el momento inicial, está dado como:

$$\vec{P}^{\,inic.}_{Sistem} = m_P\ \vec{v}_P^{\,i} + m_H\ \vec{v}_H^{\,i} + m_n\ \vec{v}_n^{\,i}$$

Donde las velocidades de los tres cuerpos están medidas con respecto al sistema de referencia de la figura mostrada.
También, el momento del sistema cuando se juntan, está formado por el momento de los tres cuerpos. Donde ahora la velocidad, de los cuerpos, es la adquirida por la plataforma. Así el momento final resulta estar dado como:

$$\vec{P}^{\,final}_{Sistem} = m_P\,\vec{v}_P^{\,f} + m_H\,\vec{v}_H^{\,f} + m_n\,\vec{v}_n^{\,f}$$

donde $\vec{v}_P^{\,f} = \vec{v}_H^{\,f} = \vec{v}_n^{\,f}$

Así, por la conservación del momento lineal, se tiene

$$m_P\,\vec{v}_P^{\,i} + m_H\,\vec{v}_H^{\,i} + m_n\,\vec{v}_n^{\,i} = m_P\,\vec{v}_P^{\,f} + m_H\,\vec{v}_H^{\,f} + m_n\,\vec{v}_n^{\,f}$$

Ahora,de acuerdo,con las condiciones del problema; se sabe que la velociad inicial de la plataforma es cero, por lo tanto

$$m_H\,\vec{v}_H^{\,i} + m_n\,\vec{v}_n^{\,i} = (\,m_P + m_H + m_n\,)\,\vec{v}_P^{\,f}$$

$$m_H\begin{pmatrix} v_H^{\,i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m_n\begin{pmatrix} -v_n^{\,i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = m_S\begin{pmatrix} v_P^{\,f} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(2\,m_n)\begin{pmatrix} 3v_n^{\,i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m_n\begin{pmatrix} -v_n^{\,i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (\,23\,m_n)\begin{pmatrix} v_P^{\,f} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6m_n v_n^{\,i} - m_n v_n^{\,i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_n v_P^{\,f} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$5m_n\,v_n^{\,i} = 23\,m_n\,v_P^{\,f}$$

$$v_P^{\,f} = \frac{5m_n v_n^{\,i}}{23\,m_n} = (5/23)\,v_n^{\,i} = (0.217)\,v_n^{\,i}$$

Determinemos ahora el desplazamiento experimentado por la plataforma, para lo cual sólo usaremos las distancias y tiempos empleados en los desplazamientos realizados por los cuerpos.

$$X_H = v_H\,\Delta\,t\;,\;X_n = v_n\,\Delta\,t\;,\;X_P = v_P\,\Delta\,t$$

Donde $\Delta\,t$ es el mismo intervalo de tiempo empleado por los tres cuerpos, durante su movimiento, y además se cumple que: $L = X_H + X_n$.

$$X_n + X_H = L = (\,v_n + v_H\,)\;\Delta\,t$$

$$\Delta\,t = \frac{L}{v_n + v_H}\quad,\quad\Delta\,t = \frac{X_P}{v_P}\,.$$

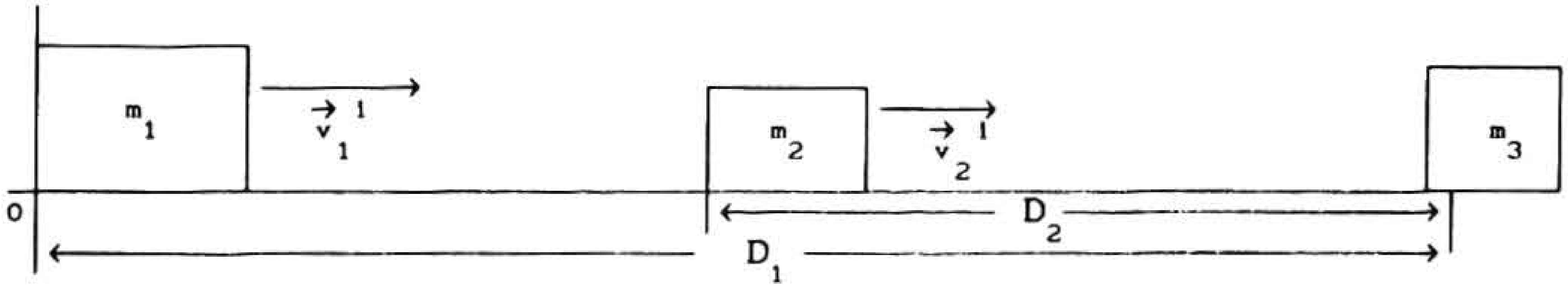
$$\frac{L}{v_n + v_H} = \frac{X_P}{v_P}$$

$$X_P = \frac{v_P}{v_H + v_n}\,L = \left(\frac{5/23\;v_n}{4\;v_n}\right) = (\,5/92)\,L$$

$$X_P = 0.05434782609\,L\;\;m.$$

* * * PROBLEMA # 5 * *

El sistema mostrado en la figura experimenta varias colisiones de tipo elástico entre los cuerpos que lo constituyen. Inicialmente el cuerpo de masa m_3 está en reposo y los cuerpos m_1 y m_2 se mueven con velocidades $\vec{v}_1^{\,1}$ y $\vec{v}_2^{\,1}$ respectivamente. La separación inicial entre los cuerpos de masas m_1 y m_3 es D_1 y la de los cuerpos m_2 y m_3 es D_2. **a)** Cuántos choques ocurren entre los cuerpos que forman al sistema? **b)** Cual es el momento lineal del sistema antes del primer choque, así como después del último choque; y cuales son las energías cinéticas inicial y final.



SOLUCION

DATOS

$m_1 = 4$ kg

$m_2 = 2$ Kg

$m_3 = 3$ Kg

$D_1 = 10$ m

$D_2 = 5$ m

$v_1^{\,1} = 5$ m/s.

$v_2^{\,1} = 2$ m/s

$v_3^{\,1} = 0$ m/s.

INCOGNITAS

a) $N = ?$

b) $P^1 = ?$, E^1_{cin}

$P^f = ?$, E^f_{cin}

Para saber que cuerpos chocan primero determinaremos el tiempo, empleado, por los cuerpos que se encuentran en movimiento, en alcanzar al cuerpo que está en reposo. Estos tiempos se designarán como t_1 y t_2 y están dados por

$$t_1 = \frac{D_1}{v_1} = \frac{50}{25} = 2 \text{ seg.} \qquad t_2 = \frac{D_2}{v_2} = \frac{25}{10} = 2.5 \text{ seg.}$$

Estos tiempos diferentes nos indican que, antes de que los cuerpos lleguen al cuerpo en reposo, estos deberán chocar entre sí. Designemos por t' el tiempo que emplea m_1 en alcanzar a m_2, y por d_1' y d_2' las distancias recorridas por estos cuerpos, en dicho t'.

$(t' = t'_1 = t'_2)$ $\qquad t'_1 = \dfrac{d'_1}{v_1}$, $t'_2 = \dfrac{d_2'}{v_2}$

donde la distancia d'_1 es, $d'_1 = D_2 + d'_2$, de acuerdo al problema.

$$\frac{D_2 + d'_2}{v_1} = \frac{d'_2}{v_2}$$

Así entonces el espacio recorrido por el cuerpo m_2, en el instante en que es alcanzado por m_1, está dado por:

$$d'_2 = \frac{v_2}{v_1 - v_2} D_2$$

$$\therefore \quad t'_1 = t'_2 = t' = \frac{v_2}{v_2(v_1 - v_2)} D_2 = \frac{D_2}{v_1 - v_2} = \frac{25}{15}$$

$$t' = 1.6666 \text{ seg.}$$

En consecuencia se cumple la siguiente relación de tiempos:

$$t_{1\to 2} = 1.6666 \text{ s} < t_{1\to 3} = 2.0 \text{ s} < t_{2\to 3} = 2.5 \text{ s.}$$

Esta relación refuerza la afirmación anterior de que los cuerpos que chocan primero, entre sí, son m_1 y m_2.

PRIMERA COLISION: m_1 con m_2

Por la conservación del momento lineal del sistema se tiene:

$$\vec{P}^{(1)\,i}_{sist} = \vec{P}^{(1)\,f}_{sist}$$

Y por la conservación de la energía del sistema, se cumple;

$$E^{(1)\,i}_{cin} = E^{(1)\,f}_{cin}$$

Las ecuaciones obtenidas de estas leyes son:

$$m_1\vec{v}_1^{(1)i} + m_2\vec{v}_2^{(1)i} = m_1\vec{v}_1^{(1)f} + m_2\vec{v}_2^{(1)f}$$

$$m_1\left(v_1^{(1)i}\right)^2 + m_2\left(v_2^{(1)i}\right)^2 = m_1\left(v_1^{(1)f}\right)^2 + m_2\left(v_2^{(1)f}\right)^2 \qquad (1)$$

Como el movimento es uni-dimensional la ecuación vectorial se simplifica, transformándose en ecuación algebráica.

$$m_1\, v_1^{(1)i} + m_2\, v_2^{(1)i} = m_1\, v_1^{(1)f} + m_2\, v_2^{(1)f} \qquad (2)$$

Despejando de esta $v_1^{(1)i}$ se tiene

$$v_1^{(1)f} = \frac{m_1 v_1^{(1)i} + m_2 v_2^{(1)i} - m_2 v_2^{(1)f}}{m_1} \qquad (3)$$

Sustituyendo la ecuación (3), en la relación de la energía, se tiene

$$\left(\frac{m_2^2}{m_1} + m_2\right)\left(v_2^{(1)f}\right)^2 + \left(-2m_2v_1^{(1)i} - \frac{2m_2^2}{m_1}v_2^{(1)i}\right)\left(v_2^{(1)f}\right) +$$

$$+ \left[2\, m_2 v_1^{(1)i}\ v_2^{(1)i} + \left(\frac{m_2^{\ 2}}{m_1} - m_2 \right) \left(v_2^{(1)i} \right)^2 \right] = 0$$

Sustituyendo los datos del problema encontramos

$$3\left(v_2^{(1)f}\right)^2 - 24\ v_2^{(1)f} + 36 = 0$$

$$v_2^{(1)f} = \begin{cases} 6 \text{ m/s} \\ 2 \text{ m/s} \end{cases}$$

Así la velocidad con la cual se mueve el cuerpo m_2 después de la colisión es $v_2^{(1)f} = 6$ m/s.

Sustituyendo en la ecuación (3) , este resultado , encontramos el valor de $v_1^{(1)f}$.

$$v_1^{(1)f} = 3 \text{ m/s}$$

Debido a que estas velocidades $v_1^{(1)f}$ y $v_2^{(1)f}$ cumplen la siguiente relación

$$v_1^{(1)f} < v_2^{(1)f}$$

la siguiente colisión ocurre entre m_2 y m_3.

SEGUNDA COLISION: $m_2$con m_3

Usando los mismos principios de conservación , del momento y de la energía, analizaremos la colisión de m_2 con m_3.

$$m_2\vec{u}_2^{(2)\ i} + m_3\vec{u}_3^{(2)\ i} = m_2\vec{u}_2^{(2)\ f} + m_3\vec{u}_3^{(2)\ f}$$

Pero, como el cuerpo m_3 inicialmente se encuentra en reposo, $\vec{u}_3^{(2)} = 0$ entonces la conservación del momento lineal se simplifica en:

$$m_2\vec{u}_2^{(2)\ i} = m_2\vec{u}_2^{(2)\ f} + m_3\vec{u}_3^{(2)\ f}$$

$$m_2 \begin{pmatrix} u_2^{(2)i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = m_2 \begin{pmatrix} u_2^{(2)f} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m_3 \begin{pmatrix} u_3^{(2)f} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$m_2 u_2^{(2)i} = m_2 u_2^{(2)f} + m_3 u_3^{(2)f} \qquad (4)$$

De manera similar, la conservación de la energía se expresa como:

$$m_2 (u_2^{(2)i})^2 = m_2 (u_2^{(2)f})^2 + m_3 (u_3^{(2)f})^2 \qquad (5)$$

Despejando de (4) u_2^f , lo sustituimos en la ecuación de la energía,

$$u_2^{(2)f} = \frac{m_2 u_2^{(2)i} - m_3 u_3^{(2)f}}{m_2} \qquad (6)$$

$$m_2 u_2^{(2)i\ 2} = m_2 u_2^{(2)i\ 2} - 2\ m_3 u_2^{(2)i} u_3^{(2)f} + \frac{m_3^{\ 2}}{m_2}\ u_3^{(2)f\ 2} + m_3 u_3^{(2)f\ 2}$$

$$u_3^{(2)f}\left(-2m_3\, u_2^{(2)i} + \left(\frac{m_3^2}{m_2} + m_3 \right) u_3^{(2)f} \right) = 0$$

$$\therefore \qquad u_3^{(2)f} = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{2\, m_2\, u_2^{(2)i}}{m_2 + m_3} \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 4.8 \text{ m/s.} \end{cases}$$

sustituyendo en (6) se encuentra u_2^f

$$u_2^{(2)f} = -\ 1.2 \text{ m/s}$$

Este resultado debe interpretarse en el sentido de que el signo negativo está indicando que el cuerpo m_2 ha invertido la dirección de su movimiento, lo cual tiene como resultado una nueva colisión entre m_2 y m_1.

TERCERA COLISION : m_1 con m_2

Nuevamente haciendo uso de la conservación de la energía y del principio de conservación del momento lineal tenemos:

$$m_1\vec{w}_1^{(3)i} + m_2\vec{w}_2^{(3)i} = m_1\vec{w}_1^{(3)f} + m_2\vec{w}_2^{(3)f}$$

$$m_1\begin{pmatrix} w_1^{(3)i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m_2\begin{pmatrix} -w_2^{(3)i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = m_1\begin{pmatrix} w_1^{(3)f} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m_2\begin{pmatrix} w_2^{(3)f} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$m_1 w_1^{(3)i} - m_2 w_2^{(3)i} = m_1 w_1^{(3)f} + m_2 w_2^{(3)f} \qquad (7)$$

$$m_1\left(w_1^{(3)i}\right)^2 + m_2\left(w_2^{(3)i}\right)^2 = m_1\left(w_1^{(3)f}\right)^2 + m_2\left(w_2^{(3)f}\right)^2 \qquad (8)$$

Despejando de (7), $w_1^{(3)f}$, y sustituyendo en (8) se tiene:

$$w_1^{(3)f} = \frac{m_1 w_1^{(3)i} - m_2 w_2^{(3)i} - m_2 w_2^{(3)f}}{m_1} \qquad (9)$$

$$\left[w_2^{(3)f}\right]^2 \left(m_2 + \frac{m_2^2}{m_1}\right) + \left[w_2^{(3)f}\right] \left(\frac{2m_2^2}{m_1} w_2^{(3)i} - 2\, m_2 w_1^{(3)i}\right) +$$

$$+ \left(\left(\frac{m_2^2}{m_1} - m_2 \right) \left(w_2^{(3)i}\right)^2 - 2\, m_2\, w_1^{(3)i}\, w_2^{(3)i} \right) = 0$$

$$3\left[w_2^{(3)f}\right]^2 - 9.6\left[w_2^{(3)f}\right] - 15.84 = 0$$

$$w_2^{(3)f} = \begin{cases} 4.4 \text{ m/s} \\ -\ 1.2 \text{ m/s} \end{cases}$$

Siendo la solución , $w_2^{(3)f} =$ **4.4** m/s ; ya que el otro valor corresponde a la velocidad como si no hubiera existido colisión con el cuerpo m_1. Lo cual, es imposible, desde el punto de vista práctico.

Así que sustituyendo en (9) este valor de $w_2^{(3)f}$, encontramos:

$$w_1^{(3)f} = 0.2 \text{ m/s}$$

Comparando los valores de las velocidades, después de estas colisiones, se observa que cumplen la siguiente relación de orden;

$$\left(w_1^{(3)f} = 0.2 \text{ m/s},\ w_2^{(3)f} = 4.4 \text{ m/s} \quad , \text{ y } \quad u_3^{(2)f} = 4.8 \text{ m/s} \right)$$

$$u_3^{(2)f} > w_2^{(3)f} > w_1^{(3)f}$$

Esto implica que no pueden ocurrir más colisiones entre los tres cuerpos m_1 , m_2 & m_3. Por lo tanto, *solo son posibles* **tres** colisiones **!**.

Veamos ahora cual es el momento lineal y energía inicial del sistema.

$$\vec{P}_S^{\,i} = \vec{p}_1^{\,i} + \vec{p}_2^{\,i} + \vec{p}_3^{\,i} = m_1\vec{v}_1^{\,i} + m_2\vec{v}_2^{\,i} + m_3\vec{v}_3^{\,i}$$

$$\vec{P}_S^{\,i} = m_1\begin{pmatrix} v_1^{\,i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m_2\begin{pmatrix} v_2^{\,i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m_3\begin{pmatrix} v_3^{\,i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ Kg m s}^{-1}$$

$$E_S^{\,i} = (1/2)\left(m_1 v_1^{i\,2} + m_2 v_2^{i\,2} + m_3 v_3^{i\,2}\right) = 54 \text{ Joules}$$

Así mismo, podemos calcular el momento lineal y energía final del sistema

$$\vec{P}_S^{\,f} = \vec{p}_1^{\,f} + \vec{p}_2^{\,f} + \vec{p}_3^{\,f} = m_1\vec{v}_1^{\,f} + m_2\vec{v}_2^{\,f} + m_3\vec{v}_3^{\,f}$$

$$\vec{P}_S^{\,f} = m_1\begin{pmatrix} v_1^{\,f} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m_2\begin{pmatrix} v_2^{\,f} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m_3\begin{pmatrix} v_3^{\,f} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}_S^{\,f} = \begin{pmatrix} m_1 v_1^{\,f} + m_2 v_2^{\,f} + m_3 v_3^{\,f} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}_S^{\,f} = \begin{pmatrix} 4(0.2)+2(4.4)+3(4.8) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ Kg m s}^{-1}$$

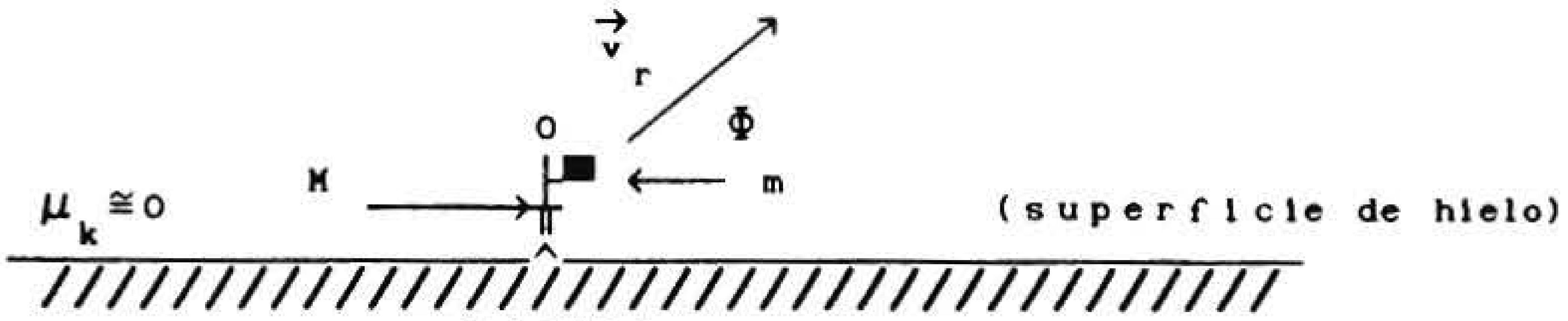
$$E_S^{\,f} = (1/2)\left(m_1\left(w_1^{(3)f}\right)^2 + m_2\left(w_2^{(3)f}\right)^2 + m_3\left(u_3^{(2)f}\right)^2\right)$$

$$E_S^{\,f} = (1/2)\left(4(0.2)^2 + 2(4.4)^2 + 3(4.8)^2\right) = 54 \text{ Joules.}$$

Dichos resultados confirman que realmente **se conserva** tanto el **momento lineal total** como la **energía** del sistema en estudio.

*** * * PROBLEMA # 6 * * ***

Un hombre esta colocado en una pista de hielo, y usa unos patines que hacen (*casi*) nula la fricción con la superficie del hielo, y lleva en sus manos una caja de masa m , la cual es lanzada por el hombre con una velocidad relativa a él $\vec{v}_r$, en la dirección mostrada en la figura. Inicialmente él se encuentra en reposo. Determine la componente horizontal de la velocidad final del hombre si su masa es M. Desprecie la fricción y el movimiento de sus brazos.



FIGURA

SOLUCION

DATOS

$m = 20$ Kg

$M = 70$ Kg

$v_r = 4$ m/s

$\Phi = 30^{\circ}$

$v_H^i = 0$

INCOGNITAS

$\vec{v}_h^{\,f} = ?$

De acuerdo a que la fuerza externa total sobre el sistema se puede considerar como cero *(la friccion es despreciable)* se cumple que:

$$\vec{F}_{Tot} = \vec{0}$$

Lo cual tiene como implicación, que se cumpla, la conservación del momento lineal total del sistema en consideración.

$$\vec{P}_{Sist} = \text{Constante}$$

$$\vec{P}_{Sist}^{\,i} = \vec{P}_{Sist}^{\,f}$$

$$\vec{P}_{Sist}^{\,i} = M_H\,\vec{v}_H^{\,i} + m_c\,\vec{v}_c^{\,i} = M_H\,(\vec{0}) + m_c(\vec{0}) = \vec{0}$$

$$\vec{P}_{Sist}^{\,f} = M_H\,\vec{v}_H^{\,f} + m_c\,\vec{v}_c^{\,f}$$

Por lo tanto , igualando el momento total inicial con el momento total final, tenemos:

$$M_H \vec{v}_H^{\,f} + m_c \vec{v}_c^{\,f} = \vec{0}$$

$$\vec{v}_H^{\,f} = - \frac{m_c}{M_H} \vec{v}_c^{\,f} \qquad (1)$$

Pero sabemos que la velocidad relativa está dada por la siguiente relación:

$$\vec{v}_r = \vec{v}_c - \vec{v}_H$$

En dicha expresión las velocidades, $\vec{v}_c$ y $\vec{v}_H$, están referidas a un observador inercial (*por ejemplo en el centro de masa del sistema*) De ésta podemos despejar la velocidad del hombre y sustituirla en la ecuación (1).

$$\vec{v}_c = \vec{v}_r + \vec{v}_H \qquad \Rightarrow \qquad \vec{v}_H^{\,f} = - \frac{m_c}{M_H}\left(\vec{v}_r + \vec{v}_H^{\,f} \right)$$

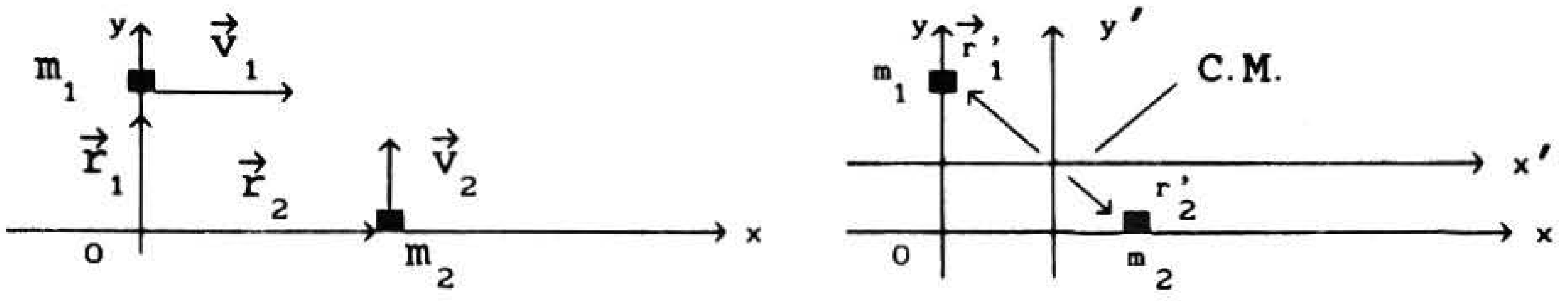
$$\vec{v}_H^{\,f} = \begin{bmatrix} v_{Hx}^{f} \\ v_{Hy}^{f} \\ v_{Hz}^{f} \end{bmatrix} = - \left(\frac{m_c}{M_H} \right) \left(\frac{M_H}{m_c + M_H} \right) \begin{pmatrix} v_r \cos \Phi \\ v_r \operatorname{sen} \Phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_{Hx}^{f} = - \frac{m_C}{m_c + M_H} v_r \cos \Phi$$

$$\boxed{v_{Hx}^{f} = - (8/9) \cos 30^{\circ} = - 0.77 \text{ m/s.}}$$

• • • PROBLEMA # 7 • • •

Los cuerpos de la figura tienen masas m_1 y m_2 y velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ respectivamente. a) Determine el momento angular total del sistema, relativo al punto " O " y relativo al centro de masa c.m. Verifique la relación entre ambos valores.
b)Determínese la energía cinética relativa a " O "y la relativa al centro de masa C.M. comprobando la relación entre ambas.



FIGURA

DATOS

$m_1 = 4$ kg

$m_2 = 8$ kg

$v_1 = 2$ m/s

$v_2 = 4$ m/s

$r_1 = 5$ m.

$r_2 = 4$ m.

INCOGNITAS

a) $\vec{L}_S^{\,o}$, $\vec{L}_S^{\,c.m.}$, $\vec{L}_S^{\,o} \longleftrightarrow \vec{L}_S^{\,c.m.}$

b) $E_{cin}^{\,o}$, $E_{cin}^{\,c.m.}$, $E_{cin}^{\,o} \longleftrightarrow E_{cin}^{\,c.m.}$

SOLUCION

Los momentos angulares medidos por dos observadores, colocados, en dos sistemas de referencia inerciales, privilegiados, llamados el sistema inercial " O " y sistema centro de masas " c.m. " serán denotados por $\vec{L}_S^{\,o}$ y $\vec{L}_S^{\,c.m.}$. De la misma manera el momento asociado con el centro de masa del sistema se le denotará por $\vec{L}_{c.m.}$
El momento angular, como sabemos, es un concepto dependiente del punto de observación ; el cual se define, para una partícula como:

$$\vec{L}^{\,o} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Veamos primero, el momento asociado al sistema visto por un observador en, el sistema de referencia inercial "O".

$$\vec{L}_S^{\,o} = \vec{L}_1^{\,o} + \vec{L}_2^{\,o} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = m_1\,\vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m_2\,\vec{r}_2 \times \vec{v}_2$$

$$\vec{L}_S^{\,o} = m_1 \begin{pmatrix} 0 \\ r_1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m_2 \begin{pmatrix} r_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_1 r_1 v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 r_2 v_2 \end{pmatrix} =$$

$$\vec{L}_S^{\,o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 r_2 v_2 - m_1 r_1 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 88 \end{pmatrix} \text{Kgm}^2\text{s}^{-1}$$

Ahora veremos cual es el momento angular medido por un observador colocado en el sistema de referencia centro de masas, " c.m. ".

$$\vec{L}_S^{\,c.m.} = \vec{L}_1^{\,c.m.} + \vec{L}_2^{\,c.m.} = \vec{r}_1\,' \times \vec{p}_1\,' + \vec{r}_2\,' \times \vec{p}_2\,' = m_1 \vec{r}_1\,' \times \vec{v}_1\,' + m_2 \vec{r}_2\,' \times \vec{v}_2\,'$$

Esta expresión requiere una interpretación cuidadosa de sus términos . Los vectores de posición $\vec{r}_1\,'$ y $\vec{r}_2\,'$, son los vectores que localizan a las partículas pero ahora vistas desde el sistema centro de masas, de igual manera $\vec{v}_1\,'$ y $\vec{v}_2\,'$ son las velocidades medidas por un observador colocado en el sistema centro de masas. Estos vectores de posición y de velocidad están dados por las siguientes relaciones:

$$\vec{r}_1\,' = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \qquad \vec{r}_2\,' = - \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$\vec{v}_1\,' = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \qquad \vec{v}_2\,' = - \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

Por lo cual el momento angular medido desde el centro de masas quedará expresado por:

$$\vec{L}_S^{\,c.m} = m_1 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \right) \times \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \right) +$$

$$+ m_2 \left(\frac{- m_1}{m_1 + m_2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \right) \times \left(\frac{- m_1}{m_1 + m_2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \right) .$$

$$\vec{L}_S^{\,c.m.} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \mu\, \vec{r}_r \times \vec{v}_r$$

En dicha expresión , μ es la masa reducida del sistema , $\vec{r}_r$ es el vector de posición relativa entre los dos cuerpos, y así mismo $\vec{v}_r$ es el vector de velocidad relativa entre los cuerpos.

$$\vec{L}_S^{\,c.m.} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} -r_2 \\ r_1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_2 v_2 - r_1 v_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{L}_S^{\,c.m.} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} \text{Kg m}^2\text{s}^{-1}.$$

Veamos ahora cual es el momento angular que **tiene asignado el centro de masa del sistema** en estudio. Este está expresado por la siguiente relación:

$$\vec{L}_{c.m.} = m_S\, \vec{r}_{c.m.} \times \vec{v}_{c.m.}$$

Donde m_S es la masa total del sistema, $\vec{r}_{c.m.}$ es el vector de posición del centro de masas del sistema, y $\vec{v}_{c.m.}$ es el vector de velocidad con que se mueve el centro de masas. Estando dados por;

$$m_S = m_1 + m_2 \quad , \quad \vec{r}_{c.m.} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad , \quad \vec{v}_{c.m.} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{L}_{c.m.} = (m_1 + m_2)^{-1} \begin{pmatrix} m_2 r_2 \\ m_1 r_1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} m_1 v_1 \\ m_2 v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = (m_1 + m_2)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2^2 r_2 v_2 - m_1^2 r_1 v_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{L}_{c.m.} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 72 \end{pmatrix} \text{kg m}^2\text{s}^{-1}.$$

Con los tres resultados obtenidos se puede realizar la comparación de los momentos angulares mediante la siguiente relación ,

$$\vec{L}_S^{\,o} = \vec{L}_S^{\,c.m.} + \vec{L}_{c.m.}$$

$$\vec{L}_S^{\,o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 88 \end{pmatrix} = \vec{L}_S^{\,c.m.} + \vec{L}_{c.m.} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 88 \end{pmatrix}$$

La determinación de la energía cinética relativa a los sistemas de referencia se realiza de la siguiente manera:

$$E_{cin}^{o} = (1/2)\left[m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 \right] = 72 \text{ Joules.}$$

$$E_{cin}^{c.m.} = (1/2)\left[m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 \right] = 1/2\, \mu\, v_r^2 = 26.66 \text{ Joules}$$

$$E_{cin\ C.M.} = \frac{1}{2}\, m_S\, v_{c.m.}^2 = \frac{1}{2}\,(m_1 + m_2)^{-1}\,(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2 = 45.33\text{J.}$$

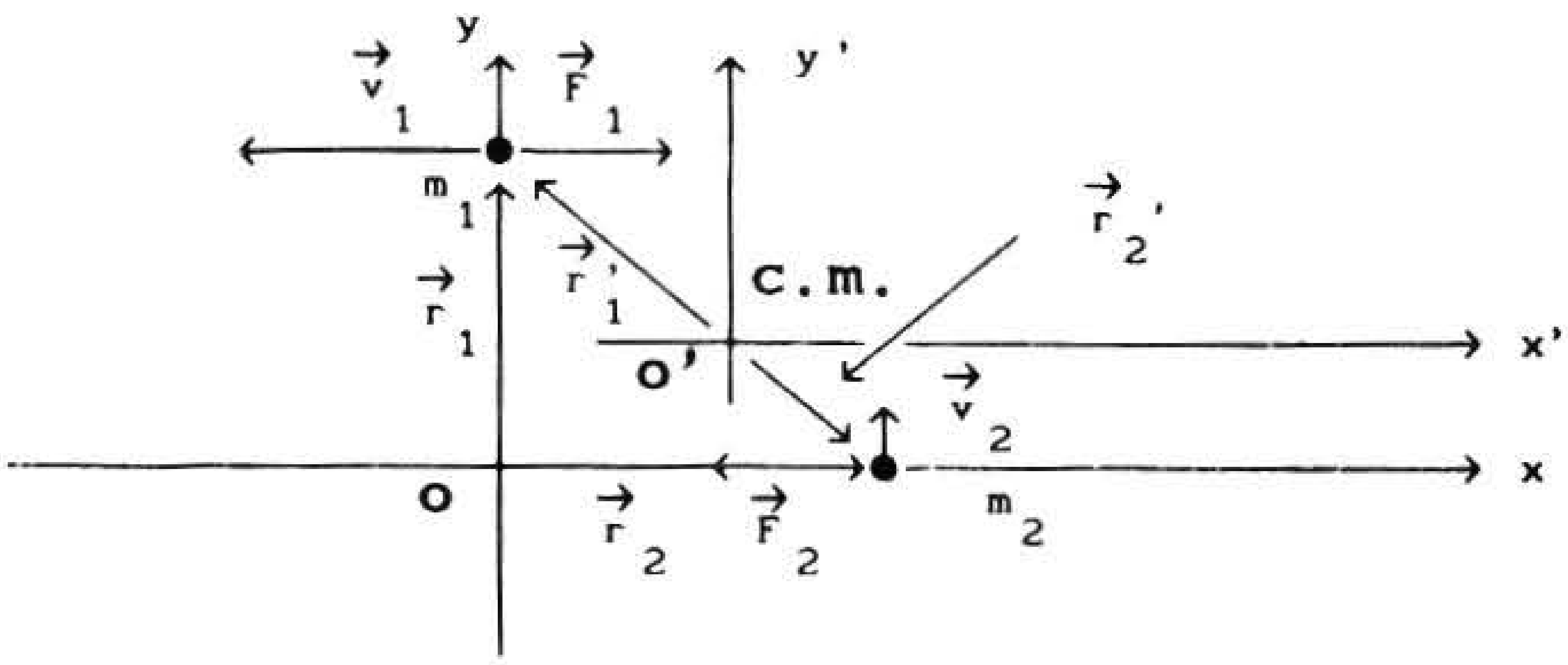
La relación entre estas energías cinéticas está gobernada por la siguiente expresión,

$$E_{cin.}^{o} = E_{cin.}^{c.m.} + E_{cin\ c.m.}$$

$$E_{cin}^{o} = 72 \text{ J.} = E_{cin}^{c.m.} + E_{cin\ c.m.} = 26.66 \text{ J.} + 45.33 \text{ J.} = 72 \text{ J}$$

* * * **PROBLEMA # 8** * * *

Para el sistema de dos partículas de masas m_1 y m_2 mostradas en la figura determínense: **a**) Los momentos producidos por las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$, el momento angular, y la energía cinética respecto al sistema de referencia OXYZ, **b**) El momento producido por las fuerzas, el momento angular y la energía cinética, ahora, respecto al sistema centro de masas O'X'Y'Z'. **c**) Las trayectorias seguidas por las partículas y el centro de masas. En el instante inicial t=0, las partículas, se mueven con las velocidades mostradas, estando localizadas en las posiciones dadas en la figura.



FIGURA

DATOS

$m_1 = 3kg$

$m_2 = 4\ kg$

$r_1 = 3\ m.$

$r_2 = 2\ m.$

$v_1 = 7\ m/s.$

$v_2 = 5\ m/s.$

$F_1 = 30\ N.$

$F_2 = 40\ N.$

INCOGNITAS

a) $\vec{\tau}^{\,o}$, $\vec{L}^{\,o}$, $E^{o}_{cin.}$

b) $\vec{\tau}^{\,c.m.}$, $\vec{L}^{\,c.m.}$, $E^{c.m.}_{cin.}$

c) Trayectorias de m_1, m_2 y del centro de masa

Se sabe que los conceptos de momento angular y momento producido por las fuerzas (torcas), son dependientes del punto de observación (en este caso el punto "o").

$$\vec{\tau}^{\,o} = \vec{r} \times \vec{F} \quad , \qquad \vec{L}^{\,o} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Y además la energía cinética para una partícula, está dada como:

$$E_{cin} = \frac{1}{2}\, mv^2$$

Primero, veremos, cual es el momento total producido por las fuerzas ejercidas sobre las partículas, visto por un observador en OXYZ.

$$\vec{\tau}_T^{\,o} = \vec{\tau}_1^{\,o} + \vec{\tau}_2^{\,o} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

$$\vec{\tau}_T^{\,o} = \begin{pmatrix} 0 \\ r_1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -F_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r_1F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -90 \end{pmatrix} \text{N-m.}$$

$$\vec{L}_T^{\,o} = \vec{L}_1^{\,o} + \vec{L}_2^{\,o} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2$$

$$\vec{L}_T^{\,o} = \begin{pmatrix} 0 \\ r_1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -m_1v_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ m_2v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1r_1v_1 + m_2r_2v_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{L}_T^{\,o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -103 \end{pmatrix} \text{kgm}^2\text{s}^{-1}$$

La energía cinética simplemente es la suma de las energías de las partículas del sistema.

$$E_{cin.} = E_{cin\ (1)} + E_{cin\ (2)} = (1/2)\ m_1v_1^2 + (1/2)\ m_2v_2^2$$

$$E_{cin} = 123.5 \text{ Joules.}$$

Respecto al sistema centro de masa los vectores de posición , son los vectores primados, por lo que las expresiones del momento angular , el momento producido por las fuerzas y la energía serán denotadas como primadas.

$$\vec{\tau}_T^{\,c.m.} = \vec{\tau}\,'_1 + \vec{\tau}\,'_2 = \vec{r}\,'_1 \times \vec{F}\,'_1 + \vec{r}\,'_2 \times \vec{F}\,'_2$$

$$\vec{L}_T^{\,c.m.} = \vec{L}_1^{\,c.m} + \vec{L}_2^{\,c.m} = \vec{r}\,'_1 \times \vec{p}\,'_1 + \vec{r}\,'_2 \times \vec{p}\,'_2 = m_1\vec{r}\,'_1\times\vec{v}\,'_1 + m_2\vec{r}\,'_2\times\vec{v}\,'_2$$

$$E^{c.m}_{cin.} = (1/2)\ m_1v'^2_1 + (1/2)\ m_2v'^2_2$$

En estas expresiones los vectores de posición están relacionados con los vectores de posición primados de la siguiente manera.

$$\vec{r}\,'_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\,(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{m_2}{m_1+m_2}\,\vec{r}_{rel}$$

$$\vec{r}\,'_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\,(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\,\vec{r}_{rel}$$

$$\vec{v}\,'_1 = \mathring{\vec{r}}\,'_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\,\mathring{\vec{r}}_{rel}$$

$$\vec{v}\,'_2 = \mathring{\vec{r}}\,'_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\,\mathring{\vec{r}}_{rel}$$

Sustituyendo estas expresiones, en la ecuación del momento angular observado desde el sistema centro de masa se tiene:

$$\vec{L}_T^{\,c.m.} = \frac{m_1m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\,\vec{r}_{rel} \times \mathring{\vec{r}}_{rel} + \frac{m_1^2m_2}{(m_1+m_2)^2}\,\vec{r}_{rel} \times \mathring{\vec{r}}_{rel}$$

$$\vec{L}_T^{\,c.m.} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \; (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

$$\vec{L}_T^{\,c.m} = \mu \begin{pmatrix} -r_2 \\ r_1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{, donde } \mu \text{ está dada por } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{L}_T^{\,c.m.} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu(r_1 v_1 + r_2 v_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 53.14 \end{pmatrix} kgm^2 s^{-1}.$$

De manera análoga, para los momentos producidos por las fuerzas, se tiene

$$\vec{\tau}_T^{\,c.m.} = \vec{r}\,'_1 \times \vec{F}\,'_1 + \vec{r}\,'_2 \times \vec{F}\,'_2 = \vec{r}\,'_1 \times \dot{\vec{p}}\,'_1 + \vec{r}\,'_2 \times \dot{\vec{p}}\,'_2$$

$$\vec{\tau}_T^{\,c.m.} = \frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \; \vec{r}_{rel} \times \vec{a}_{rel} + \frac{m_1^2 \, m_2}{(m_1 + m_2)^2} \; \vec{r}_{rel} \times \vec{a}_{rel}$$

$$\vec{\tau}_T^{\,c.m.} = \mu \; \vec{r}_{rel} \times \vec{a}_{rel}$$

donde la aceleración relativa está dada por:

$$\vec{a}_{rel} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = (1/m_1)\, \vec{F}_1 - (1/m_2)\, \vec{F}_2$$

Por lo tanto, sustituyendo en la expresión del momento total producido por las fuerzas, se tendrá lo siguiente:

$$\vec{\tau}_T^{\,c.m.} = \mu \begin{pmatrix} -r_2 \\ r_1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (F_1/m_1) \\ (F_2/m_2) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mu(r_1 F_1/m_1 + r_2 F_2/m_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -85.7 \end{pmatrix}$$

Finalmente la energía cinética medida desde el sistema centro de masas estará dada por:

$$E_{cin.}^{c.m.} = (1/2) m_1 v_1'^{\,2} + (1/2) m_2 v_2'^{\,2} = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} v_{rel}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} v_{rel}^2$$

Donde la magnitud de la velocidad relativa se calcula como,

$$\vec{v}_{rel} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_{rel}^2 = v_1^2 + v_2^2$$

$$E_{cin.}^{c.m.} = (1/2) \; \mu \; v_{rel}^2 = 7.37 \text{ Joules.}$$

Las trayectorias de las partículas se encuentran integrando las ecuaciones de movimiento de cada una de ellas, o sea integrando la segunda ley de Newton en las variables lineales.

Debido a que las fuerzas, a las que están sometidas las partículas, son constantes la integración es sencilla.

$$\vec{a}_1 = (1/m_1)\; \vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \int d\vec{v}_1(t) = \int \vec{a}_1 \; dt = \int \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$\vec{v}_1(t) = \vec{v}_1(t=0) + \vec{a}_1\ t = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10\ t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 + 10\ t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\int d\vec{r}_1 = \int \vec{v}_1(t)\ dt \qquad \Rightarrow \qquad \vec{r}_1(t) = \vec{r}_1(t=0) + \int \vec{v}_1(t)\ dt$$

$$\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7t+5t^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7t+5t^2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -7t + 5t^2$$

$$y_1 = 3$$

$$z_1 = 0$$

Estas ecuaciones nos indican que la partícula m_1 se mueve en el plano OXY a lo largo de una línea recta, paralela al eje de las ordenadas, de valor y=3 y se mueve hacia los valores negativos de las x un tiempo muy pequeño; para posteriormente moverse hacia las x positivas, cuando transcurre el tiempo.
De manera completamente similar se determina, para la partícula m_2 , la aceleración $\vec{a}_2$, la velocidad $\vec{v}_2$, y la posición $\vec{r}_2$.

$$\vec{a}_2 = (1/m_2)\ \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2(t) = \begin{pmatrix} -10t \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} 2-5t^2 \\ 5t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = 2 - 5t^2$$

$$y_2 = 5t$$

$$z_2 = 0$$

Despejando de y_2 el tiempo, y sustituyendo en x_2 encontramos la ecuación de la trayectoria de la partícula m_2.

$$y^2 = 10 - 5x$$

Esta ecuación , indica que el movimiento realizado por m es a lo largo de una parábola que, está localizada en el plano OXY.
Para el movimiento del centro de masa, se tiene:

$$\vec{a}^{\,c.m.} = (1/m_s)\ \vec{F}_T = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}{m_1 + m_2} = \begin{pmatrix} -(10/7) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_{c.m.} = \begin{pmatrix} -7 - 10/7\ t \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{c.m} = \begin{pmatrix} 8/7 - 7t - 5/7 t^2 \\ 9/7 + 5t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^{c.m.} = 8/7 - 7\ t - 5/7\ t^2$$

$$y^{c.m.} = 9/7 + 5\ t$$

$$z^{c.m.} = 0$$

Estas ecuaciones nos indican que el centro de masa del sistema se mueve a lo largo de una trayectoria de tipo parabólico, sobre el plano OXY, cuya ecuación es:

$$\boxed{\mathbf{x = 8/7 - 7/5(\ y - 9/7\ ) + 1/35(\ y - 9/7)^2}}$$

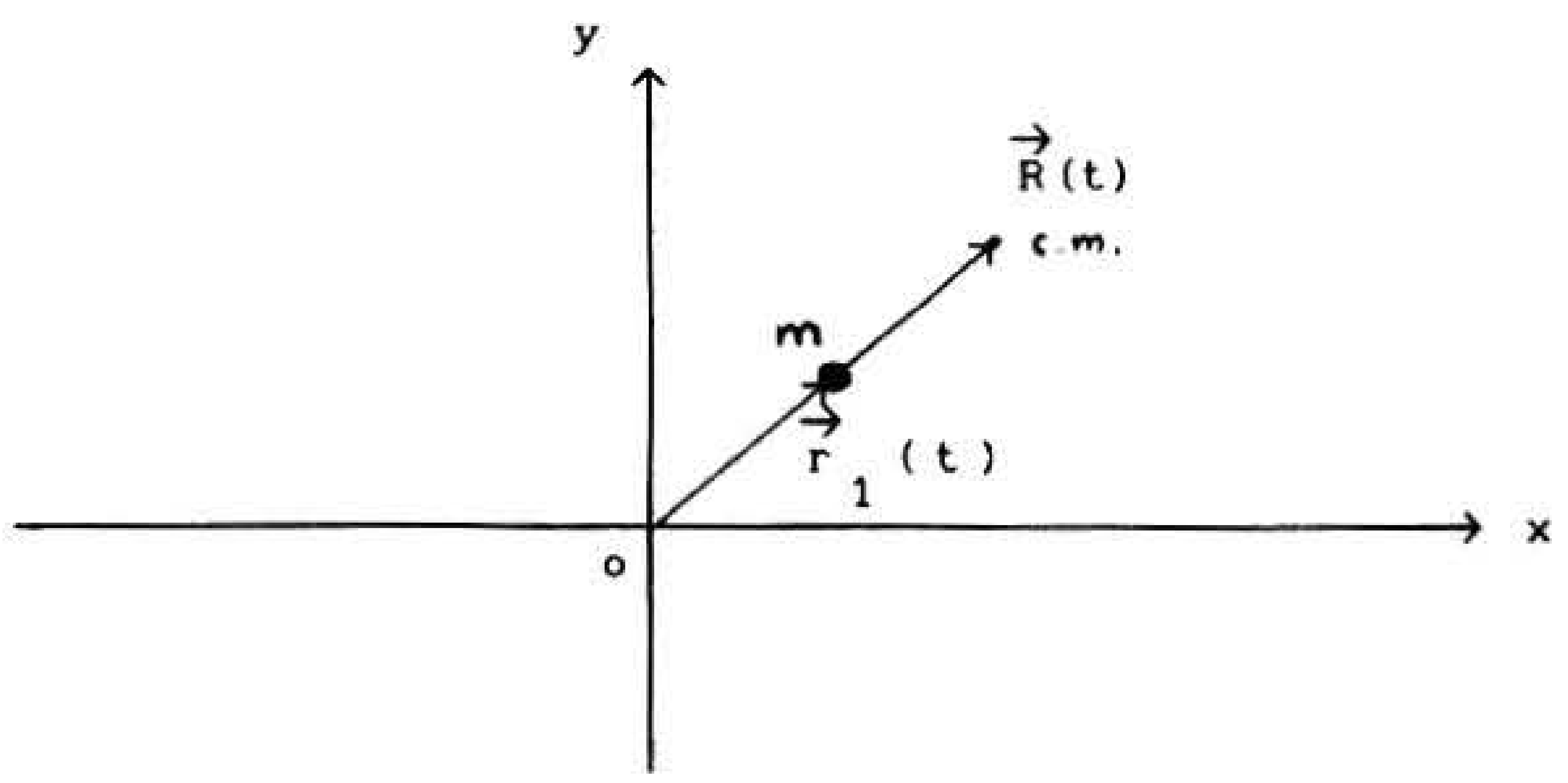
* * * PROBLEMA # 9 * * *

En un sistema de referencia , una partícula de masa m se desplaza a lo largo de la trayectoria $\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} r_1 \cos t \\ r_1 \operatorname{sen} t \\ 0 \end{pmatrix}$,

t está dado en segundos y las distancias en metros . Además supóngase que hay una segunda partícula idéntica que se desplaza de tal modo que el centro de masa del sistema se mueve según la trayectoria $\vec{R}_o = \begin{pmatrix} 2R_o \cos t \\ 2R_o \operatorname{sen} t \\ 0 \end{pmatrix}$.

a). Encuéntrese la trayectoria de la otra partícula,

b). Cuál es la fuerza total que actúa sobre las partículas.



SOLUCION

De acuerdo, con la relación que define, a la posición del centro de masa de un sistema de partículas este está expresado por

$$\vec{r}_{c.m.}(t) = \frac{m_1 \vec{r}_1(t) + m_2 \vec{r}_2(t)}{m_1 + m_2}$$

Debido a que las masas de ambas partículas son iguales $m_1 = m_2$, entonces se tiene

$$\vec{r}_{c.m}(t) = \frac{m_1}{2\, m_1} \vec{r}_1(t) + \frac{m_2}{2\, m_2} \vec{r}_2(t)$$

$$\vec{r}_{c.m.}(t) = 1/2\ \vec{r}_1(t) + 1/2\ \vec{r}_2(t)$$

Por lo tanto al sustituir el vector centro de masa , y el vector de posición de la partícula 1 se obtiene

$$\vec{r}_{c.m.}(t) = \begin{pmatrix} 2R_o \cos t \\ 2R_o \mathrm{sen}\ t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2\ r_1 \cos t \\ 1/2\ r_1 \mathrm{sen}\ t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2\ X(t) \\ 1/2\ Y(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Igualando, las correspondientes componentes en, ambos miembros de la igualdad vectorial encontramos

$$2\ R_o \cos t = 1/2\ r_1 \cos t + 1/2\ X(t)$$
$$2\ R_o \mathrm{sen}\ t = 1/2\ r_1 \mathrm{sen}\ t + 1/2\ Y(t)$$

$$X(t) = 2\ [2\ R_o \cos t - 1/2\ r_1 \cos t]$$
$$Y(t) = 2\ [2\ R_o \mathrm{sen}\ t - 1/2\ r_1 \mathrm{sen}\ t\ ]$$

Por lo tanto el vector de posición de la segunda partícula está expresado como

$$\vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} 4R_o \cos t - r_1 \cos t \\ 4R_o \mathrm{sen}\ t - r_1 \mathrm{sen}\ t \\ 0 \end{pmatrix}$$

La segunda ley de Newton establece que, la fuerza total externa sobre el sistema, es equivalente a la acción sobre el centro de masa del sistema, considerado como una partícula de masa m_s igual a la masa total.

$$\vec{F}_T = m_s\ \vec{a}_{c.m.}$$

Para la situación que se está estudiando , lo expresamos de la siguiente manera

$$\vec{F}_T = 2\ m\ \frac{d^2\vec{R}_{c.m.}}{d\ t^2}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_T = 2\ m\ \frac{d^2}{d\ t^2}\begin{pmatrix} 2R_o \cos\ t \\ 2R_o \mathit{sen}\ t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_T = \begin{pmatrix} -4mR\ \cos\ t \\ -4mR\ \mathit{sen}\ t \\ 0 \end{pmatrix}$$

• • • PROBLEMA # 10 • • •

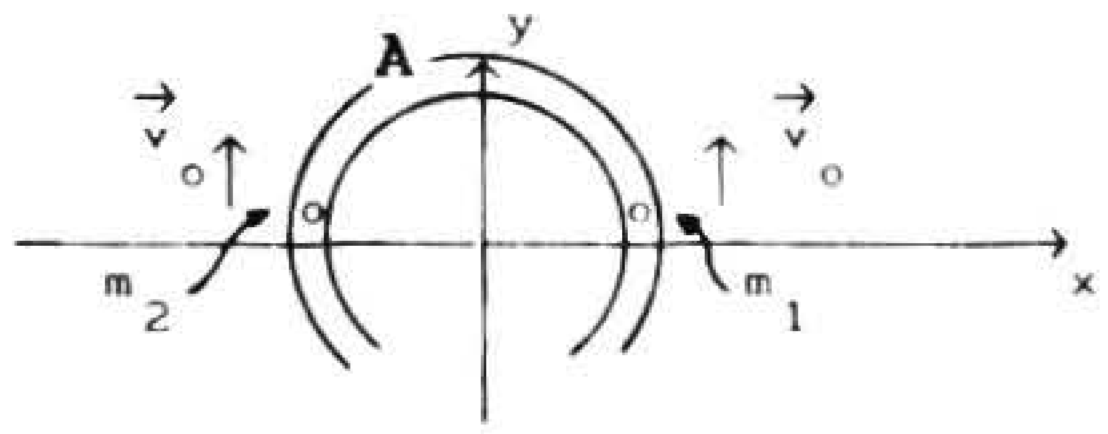
Dos partículas iguales, cada una de ellas con masa *m* , se mueven en el interior de un tubo circular , horizontal liso de radio R como se muestra en la figura. Supóngase que, inicialmente las partículas están colocadas simétricamente en los puntos $\begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en el sistema de referencia de la figura, y se mueven con velocidad $\vec{v}_o$. Para los instantes t anteriores a su colisión en el punto **A** :

a) Determine la posición del centro de masa

b) Cuál es la suma de las fuerzas externas que actúan sobre las dos partículas;

c) Calcule la fuerza que actúa sobre cada partícula por separado,

d) Determine la suma de fuerzas obtenidas en **c**) y compárelas con b)



FIGURA

DATOS	INCOGNITAS
$m_1 = m_2 = m$	a) $\vec{r}_{c.m.}$
R	b) $\vec{F}_T$
V_o	c) $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$
	d) $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ & b)

SOLUCION

La cinemática para el movimiento circular determinará las posiciones de ambas partículas al estarse moviendo dentro del tubo circular, que en coordenadas polares (cilíndricas) se expresan por

$$\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} R\cos\theta(t) \\ R\,sen\,\theta(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} -R\cos\theta(t) \\ R\,sen\,\theta(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

A partir, de la definición, de la posición del centro de masa para un sistema de partículas (en este caso 2 partículas) obtenemos

$$\vec{r}_{c.m.}(t) = \frac{m_1\,\vec{r}_1(t) + m_2\,\vec{r}_2(t)}{m_1 + m_2}$$

En el caso bajo análisis las masas de ambas partículas son iguales por lo tanto la posición del centro de masa se reduce a

$$\vec{r}_{c.m.}(t) = 1/2\ [\ \vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)\ ]$$

$$\vec{r}_{c.m.}(t) = 1/2 \left(\begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\,sen\,\theta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R\cos\theta \\ R\,sen\,\theta \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\vec{r}_{c.m.}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ R\,sen\,\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Del movimiento circular se tiene

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \qquad \Rightarrow \qquad \theta(t) = \omega\,t = \frac{v_o\,t}{R}$$

$$\vec{r}_{c.m.}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ R\,sen(\frac{v_o\,t}{R}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_{ext.sist} = m_{sist}\,\vec{a}_{c.m.} = (m_1 + m_2)\,\ddot{\vec{r}}_{c.m.}(t) = 2m\,\frac{d^2\,\vec{r}_{c.m}}{d\,t^2}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_{ext.\ sist} = 2mR \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{d^2}{dt^2}\ sen\ (\frac{V_o\ t}{R}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_{ext.sis} = -\frac{2mv_o^2}{R} \begin{pmatrix} 0 \\ sen\ (\frac{v_o\ \mathbf{t}}{R}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora bien, la dinámica para cada una de las partículas, nos da

$$\vec{\mathbf{F}}_1 = m_1\ \vec{\mathbf{a}}_1 = m_1\ \frac{d^2\vec{\mathbf{r}}_1}{dt^2} = m_1 R \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2}\ cos\ \theta(t) \\ \frac{d^2}{dt^2}\ sen\ \theta(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_2 = m_2\ \vec{\mathbf{a}}_2 = m_2\ \frac{d^2\vec{\mathbf{r}}_2}{dt^2} = m_2 R \begin{bmatrix} \frac{d^2}{dt^2}\ (-\ cos\ \theta(t)) \\ \frac{d^2}{dt^2}\ sen\ \theta\ (t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_1 = -\ m_1 \frac{v_o^2}{R} \begin{pmatrix} cos\ (\frac{Vot}{R}) \\ sen\ (\frac{Vot}{R}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_2 = m_2 \frac{v_o^2}{R} \begin{pmatrix} +\ cos\ (\frac{Vot}{R}) \\ -\ sen\ (\frac{Vot}{R}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego entonces, la suma de fuerzas sobre las partículas, se expresa mediante lo siguiente

$$\vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 = -\ \frac{m_1 v_o^2}{R} \begin{pmatrix} cos\ (\frac{Vot}{R}) \\ sen\ (\frac{Vot}{R}) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{m_2 v_o^2}{R} \begin{pmatrix} +\ cos(\frac{Vot}{R}) \\ -\ sen(\frac{Vot}{R}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2m\frac{V_o^2}{R}\ sen\ (\frac{V_o t}{R}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

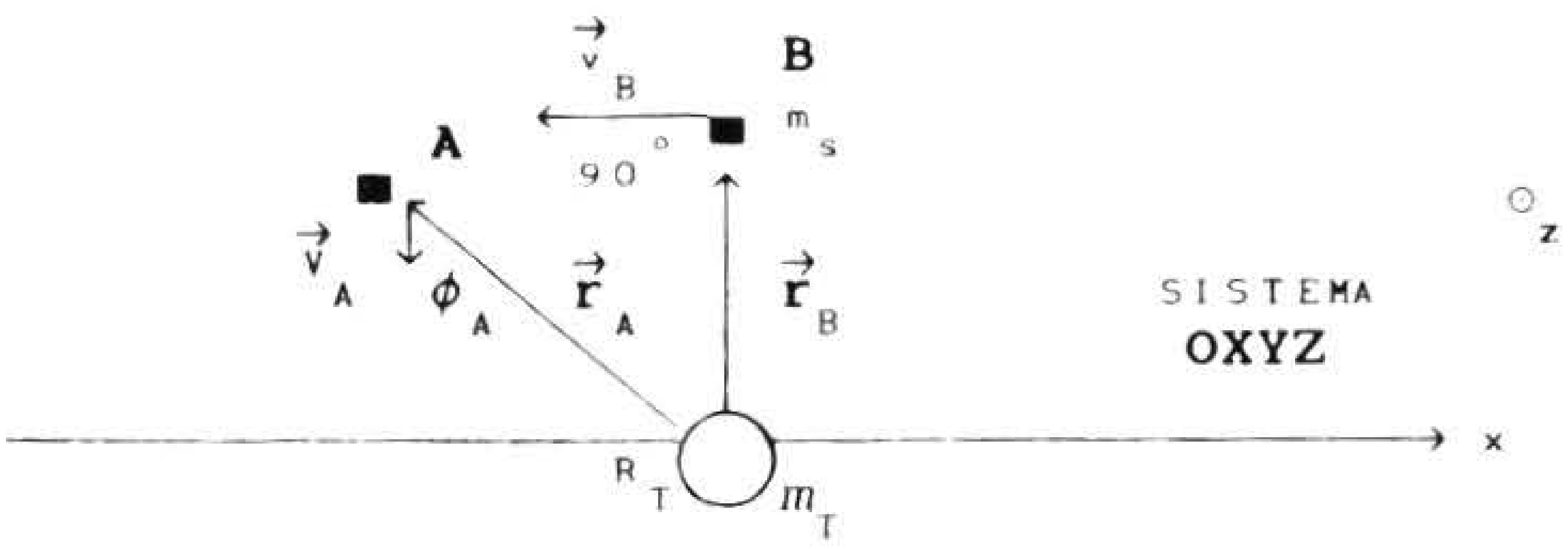
Comparando, el resultado encontrado para, la fuerza externa sobre el sistema; con la suma de fuerzas ejercidas sobre cada una de las partículas, encontramos que ambas coinciden, como debe de ser de acuerdo con la dinámica del problema.

• • • PROBLEMA # 11 • • •

Un satélite artificial, en órbita alrededor de la tierra, tiene una masa $m_{sat.}$ y se encuentra describiendo una trayectoria elíptica plana. Un sistema de rastreo terrestre observa que cuando este pasa por la posición **B**, su vector de posición es $\vec{r}_B$, y lleva una velocidad $\vec{v}_B$; estos forman entre sí un ángulo de 90°, siendo este su máximo acercamiento. Siguiendo su trayectoria de movimiento, posteriormente se observa en el punto **A**, siendo su vector de posición $\vec{r}_A$ y su velocidad $\vec{v}_A$. En este otro punto se observa que el ángulo entre ellos es de 60°.

a) Cuál es la velocidad del satélite artificial cuando pasa por el punto **B** ?

b) Cuál es la mínima distancia entre la tierra y el satélite (Suponga la tierra como una esfera de masa m_T y radio R_T).



DATOS

$m_s = 800$ k

$V_A = 12 \times 10^3$ m/s

$r_A = 15 \times 10^6$ m.

$\phi_A = 60°$

$m_T = 5.976 \times 10^{24}$ k

$G = 6.67 \times 10^{-11}\ m^3\ k^{-1}\ s^{-2}$

INCOGNITAS

a) $V_B = ?$

b) $r_B = r_{min.} = ?$

SOLUCION

Aplicando el principio de conservación de la energía mecánica, al sistema **Tierra-Satelite**, se tiene:

$$E_T = E_{cin} + E_{Pot.} = \textbf{CONSTANTE}$$

donde las partes constituyentes de la energía son

$$E_{cin} = 1/2\ m_s\ v_s^2 + 1/2\ I_T\ \omega^2$$

$$E_{Pot} = G\frac{m_s\ m_T}{\| \vec{r}_{T-S} \|}$$

$$E^A = 1/2\ I_T\ \omega_A^2 + 1/2\ m_s\ v_A^2 + G\ \frac{m_T\ m_s}{r_A}$$

$$E^B = 1/2\ I_T\ \omega_B^2 + 1/2\ m_s\ v_B^2 + G\ \frac{m_T\ m_s}{r_B}$$

$$E^A = E^B$$

$$1/2\ I_T\omega_A^2 + 1/2\ m_s v_A^2 + G\frac{m_T\ m_s}{r_A} = 1/2\ m_s v_B^2 + G\frac{m_T\ m_s}{r_B} + 1/2\ I_T\omega_B^2$$

$$v_A^2 + 2\ \frac{G\ m_T}{r_A} = v_B^2 + 2\frac{G\ m_T}{r_B} \qquad (1)$$

Como la fuerza , que actúa sobre el satélite artificial, apunta en la dirección del vector de posición , esto implica que la torca ejercida sobre éste es nula, o sea que

$$\vec{\tau}_{ext} = \vec{0}$$

Lo cual tiene como consecuencia que se conserve el momento angular $\vec{L}$ del sistema,

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f$$

La medición del momento angular la realiza un observador **"inercial"** situado en la tierra (sistema **OXYZ**).

$$\vec{L}^o = \vec{L}_S + \vec{L}_T = m_s\ \vec{r}_s \times \vec{v}_s + I_T\ \vec{\omega} + m_T\ \vec{r}_T \times \vec{v}_T$$

Pero como la tierra no se traslada respecto a si misma $\vec{v}_i = \vec{v}_f = \vec{0}$. Luego entonces en el punto **A** (**B**), se tiene:

$$\vec{L}_A^o = m_s\ \vec{r}_s^{\ A} \times \vec{v}_s^{\ A} + I_T\ \vec{\omega}_A$$

$$\vec{L}_B^o = m_s \vec{r}_s^{\ B} \times \vec{v}_s^{\ B} + I_T\ \vec{\omega}_B$$

$$m_s \vec{r}_s^{\ A} \times \vec{v}_s^{\ A} + I_T \vec{\omega}_A = m_s \vec{r}_s^{\ B} \times \vec{v}_s^{\ B} + I_T \vec{\omega}_B$$

$$\vec{r}_A \times \vec{v}_A = r_A\ v_A\ sen\ \phi\ \hat{z}$$

$$\vec{r}_B \times \vec{v}_B = r_B\ v_B\ sen\ 90^\circ\ \hat{z}$$

Ahora bien , para el análisis , la velocidad de rotación de la tierra como su momento de inercia no cambian al evolucionar el sistema en el tiempo. Por lo cual la conservación del momento angular se simplifica en

$$r_B \, v_B \, \hat{z} = r_A \, v_A \, sen\, \phi \, \hat{z}$$

Lo cual implica que

$$v_B = \frac{r_A \, v_A \, sen\, \phi}{r_B} \qquad (2)$$

Reemplazando la ecuación (2) en la (1), se tiene

$$\frac{(r_A \, v_A \, sen\, \phi\,)^2}{r_B^2} + \frac{2\, G\, m_T}{r_B} = \frac{(r_A v_A sen\phi)^2 + 2\, G\, m_T\, r_B}{r_B^2} = E^A$$

$$r_B^2\, E^A - r_B(\, 2\, G\, m_T) - (\, r_A\, v_A\, sen\, \phi\,)^2 = 0$$

$$r_B = \frac{+\, 2\, G\, m_T \pm \sqrt{4Gm_T^2 + 4E^A\, r_A^2\, v_A^2\, sen^2\phi}}{2\, E^A}$$

$$r_B = \begin{cases} r_B^+ = 5.6 \times 10^5 \text{ m.} \\ r_B^- = -5.5 \times 10^5 \text{ m.} \end{cases}$$

Por lo tanto la máxima distancia de acercamiento corresponde a la raíz positiva de la ecuación cuadrática obtenida. La raíz negativa no es admisible físicamente ya que no existen distancias negativas en la naturaleza.

$$E^A = 1/2\, m_s\, v_A^2 + \frac{G\, m_s\, m_T}{r_A}$$

$$\boxed{E^A = 7.886 \times 10^{10} \text{ J}}$$

* * * PROBLEMA # 12 * * *

Dos cuerpos están unidos mediante un resorte no deformado de constante elástica desconocida, las masas de los bloques son m_1 y m_2. Sobre cada una de ellas se aplican las fuerzas indicadas en la figura .(instantánea y simultáneamente) .

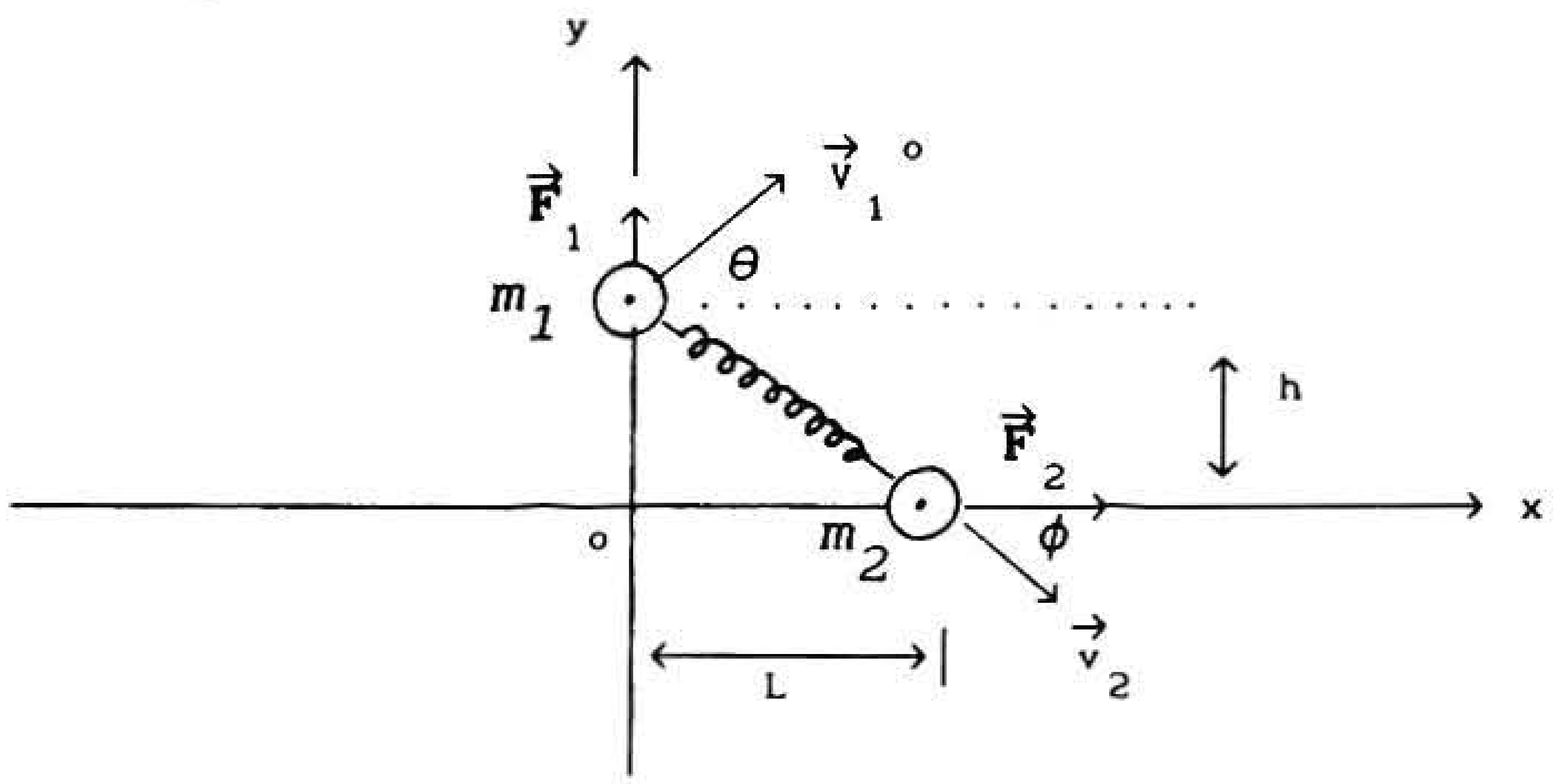
Determinar las siguientes cantidades:

a) La aceleración experimentada por el centro de masa.;

b) La velocidad del centro de masa en el instante de tiempo $t=3$ s.

c)El vector de posición del centro de masas al tiempo $t=5$ s.

d) El momento lineal total del sistema en el instante de tiempo $t=6$ seg.



DATOS

$m_1 = 2$ k

$m_2 = 4$ k

$\|\vec{F}_1\| = 6$ N

$\|\vec{F}_2\| = 12$ N

$L = 3$ m.

$h = 10$ m.

$\phi = \pi/3$ rad.

$\theta = \pi/4$ rad.

INCOGNITAS

a) $\vec{a}_{c.m.} = ?$

b) $\vec{v}_{c.m.}(t=3) = ?$

c) $\vec{r}_{c.m}(t=5) = ?$

d) $\vec{P}_T(t=6) = ?$

$\|\vec{v}_1\| = 5$ m/s.

$\|\vec{v}_2\| = 3$ m/s.

SOLUCION

Primero especificaremos con claridad cuáles son las condiciones iniciales bajo las que se encuentra el sistema estudiado.

$$\vec{\mathbf{r}}_1(t{=}0) = \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{\mathbf{r}}_2(t{=}0) = \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{v}}_1(t{=}0) = \begin{pmatrix} v_1^{\circ}\cos\theta \\ v_1^{\circ}\operatorname{sen}\theta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{\mathbf{v}}_2(t{=}0) = \begin{pmatrix} v_2^{\circ}\cos\phi \\ v_2^{\circ}\operatorname{sen}\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora apliquemos las definiciones de posición, velocidad y aceleración del centro de masa.

$$\vec{\mathbf{r}}_{c.m}(t) = \frac{m_1\vec{\mathbf{r}}_1(t) + m_2\vec{\mathbf{r}}_2(t)}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{\mathbf{v}}_{c.m}(t) = \frac{m_1\vec{\mathbf{v}}_1(t) + m_2\vec{\mathbf{v}}_2(t)}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{\mathbf{a}}_{c.m}(t) = \frac{m_1\vec{\mathbf{a}}_1(t) + m_2\vec{\mathbf{a}}_2(t)}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_T = m_T\,\vec{\mathbf{a}}_{c.m}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_T = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ F_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{a}}_{c.m.}(t) = \frac{1}{m_T}\,\vec{\mathbf{F}}_T = (1/6)\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pero de la cinemática sabemos que

$$\vec{\mathbf{a}}_{c.m}(t) = \frac{d}{dt}\,[\vec{\mathbf{v}}_{c.m}] \qquad \therefore$$

$$d\,\vec{\mathbf{v}}_{c.m} = \vec{\mathbf{a}}_{c.m}\,dt \qquad \Rightarrow \qquad \int_{\vec{v}_{c.m}(t=0)}^{\vec{v}_{c.m}(t)} d\,\vec{\mathbf{v}}_{c.m} = \int_{t=0}^{t} \vec{\mathbf{a}}_{c.m}\,dt$$

$$\vec{\mathbf{v}}_{c.m}(t) - \vec{\mathbf{v}}_{c.m}(t{=}0) = \int_{t=0}^{t} \vec{\mathbf{a}}_{c.m}\,dt$$

$$\vec{v}_{c.m}(t) = \vec{v}_{c.m}(t=0) + \int_{t=0}^{t} \vec{a}_{c.m}\, dt$$

En dicha expresión, se tendrán que sustituir, la velocidad inicial del centro de masas así como la aceleración encontrada antes.

$$\int_{t=0}^{t} \vec{a}_{c.m}\, dt = \int_{t=0}^{t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \begin{bmatrix} \int 2\, dt \\ \int dt \\ \int 0\, dt \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_{c.m}(t=0) = \frac{m_1\ \vec{v}_1(t=0) + m_2\ \vec{v}_2(t=0)}{m_1 + m_2} = 1/3 \begin{pmatrix} v_1 cos\theta \\ v_1 sen\theta \\ 0 \end{pmatrix} + 2/3 \begin{pmatrix} v_2 cos\phi \\ v_2 sen\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_{c.m}(t=0) = \begin{pmatrix} 1/3\ v_1 cos\ \theta + 2/3\ v_2 cos\ \phi \\ 1/3\ v_1 sen\ \theta + 2/3\ v_2 sens\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.18 \\ 2.91 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la velocidad en el instante de tiempo igual a $t=3$ seg está dada por

$$\vec{v}_{c.m}(t=3) = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}_{t=3} + \begin{pmatrix} 2.18 \\ 2.91 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.18 \\ 5.91 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De manera similar integrando la velocidad, podemos determinar la posición del centro de masa en cualquier instante de tiempo

$$\vec{v}_{c.m}(t) = \frac{d}{dt}\left[\vec{r}(t)\right] \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_{c.m}(t) = \vec{r}_{c.m}(t=0) + \int_{t=0}^{t} \vec{v}_{c.m}(t)\, dt$$

$$\vec{r}_{c.m}(t) = \begin{pmatrix} 2/3\ L \\ 1/3\ h \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{t=0}^{t} \begin{pmatrix} 2t + 2.18 \\ t + 2.91 \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$\vec{r}_{c.m}(t) = \begin{pmatrix} 2/3\ L \\ 1/3\ h \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 + 2.18\ t \\ 1/2\ t^2 + 2.91\ t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{c.m}(t=5) = \begin{pmatrix} 2 \\ 10/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 35.90 \\ 27.05 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37.90 \\ 30.38 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El momento lineal , que posee el sistema cuando han trascu-rrido 6 segundos está dado por

$$\vec{P}_T(t) = m_s \vec{v}_{c.m}(t) \Rightarrow \vec{P}_T(t=6) = 6\ \vec{v}_{c.m}(6) = 6 \begin{pmatrix} 14.18 \\ 8.91 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 85.08 \\ 53.46 \\ 0 \end{pmatrix} m/s.Kg$$

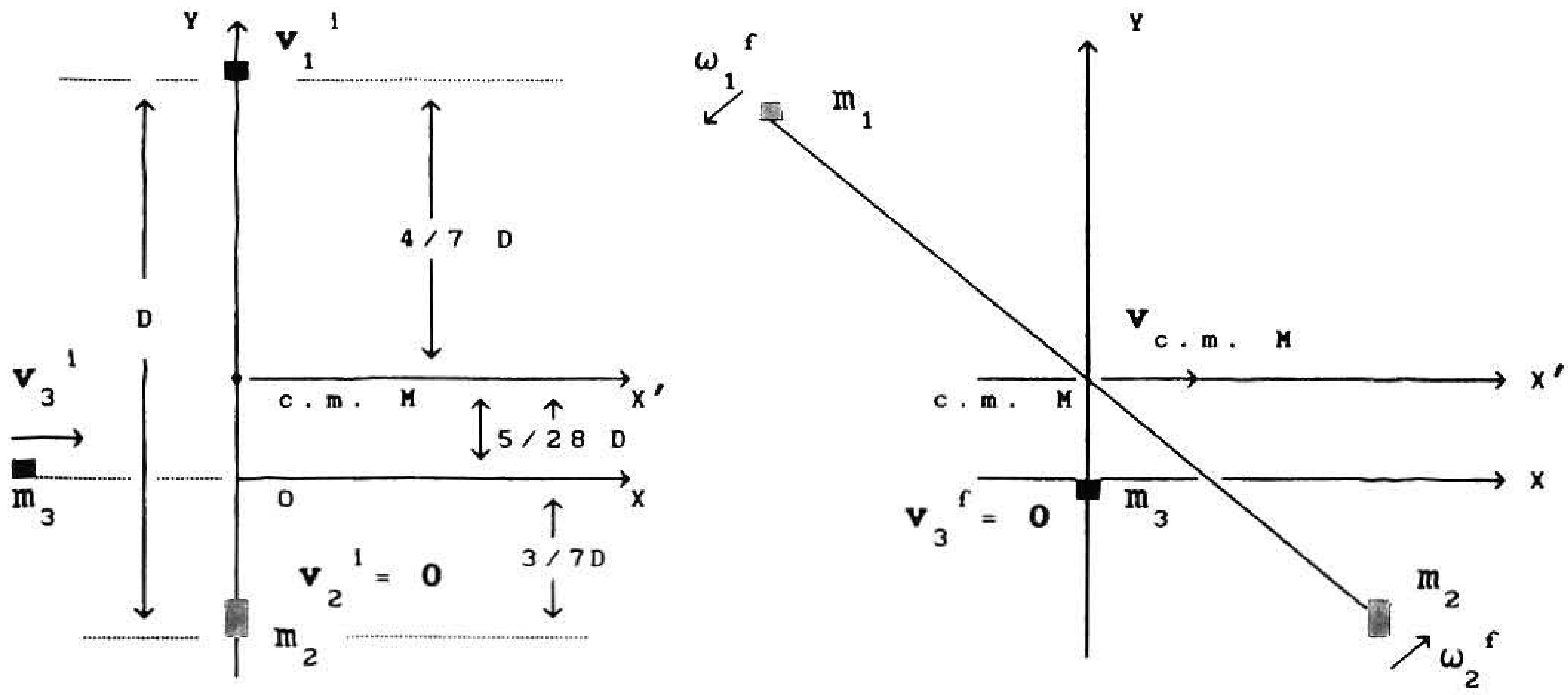
• • • PROBLEMA # 13 • • •

Una mancuerna formada por 2 cuerpos de masas m_1 y m_2 unidos mediante una varilla de masa despreciable (m_v), se encuentra inicialmente en reposo; sobre una mesa horizontal "sin fricción" y esta puede moverse libremente. En dirección hacia la mancuerna se mueve un cuerpo de masa m_3, el cual experimenta una colisión de tipo elástica con la mancuerna, quedando en reposo después de la colisión. Determínense las siguientes propiedades del sistema mecánico en consideración:

a) El valor asociado a la masa del cuerpo m_3;

b) La velocidad con que se mueve el centro de masa (c.m. M) de la mancuerna inmediatamente después de la colisión;

c) La velocidad angular, respecto al centro de masa de la mancuerna (c.m. M), después de la colisión.



FIGURA

Vista de un observador fuera del plano de movimiento. "Antes" y "despues" de la colision.

DATOS	**INCOGNITAS**
$m_1 = 3$ kg.	$m_3 = ?$
$m_2 = 4$ kg.	$v^f_{c.m.\ M} = ?$
$v_3^i = 15$ m/s	$\omega^f_M = ?$
$D = 0.6$ m.	

SOLUCION

Debido a que la colisión es de tipo elástico , se cumplen , el principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal y la energía mecánica total. Además como no actúan torcas externas se conserva también el momento angular total del sistema.

$$\vec{P}^{\,inic.}_{Sist.} = \vec{P}^{\,final}_{Sist.}$$
$$E^{\,inic.}_{Sist.} = E^{\,final}_{Sist.}$$
$$\vec{L}^{\,inic.}_{Sist.} = \vec{L}^{\,final}_{Sist.}$$

Establezcamos primero las ecuaciones de conservación del momento lineal total del sistema.

$$\vec{P}^{\,i}_{Sist.} = \vec{P}^{\,f}_{Sist.}$$

donde, $\vec{P}^{\,i}_{Sist.} = \vec{P}_3^{\,i} + \vec{P}_M^{\,i} = m_3\vec{v}_3^{\,i} + m_M\vec{v}^{\,i}_{c.m.\ M}$

$$\vec{P}^{\,f}_{Sist.} = \vec{P}_3^{\,f} + \vec{P}_M^{\,f} = m_3\vec{v}_3^{\,f} + m_M\vec{v}^{\,f}_{c.m.\ M}$$

$\vec{P}_3$ = Momento lineal del cuerpo de masa m_3 (inicial o final)

$\vec{P}_M$ = Momento lineal de la mancuerna (inicial o final)

$\vec{v}_3$ = Velocidad del cuerpo de masa m_3 (inicial o final)

$\vec{v}_{c.m.\ M}$ = Velocidad del centro de masa de la mancuerna (inicial o final)

Luego entonces, por la conservación del momento lineal total, se tiene:

$$m_3\,\vec{v}_3^{\,i} + m_M\,\vec{v}^{\,i}_{c.m.\ M} = m_3\,\vec{v}_3^{\,f} + m_M\,\vec{v}^{\,f}_{c.m.\ M} \qquad (1)$$

De las " **condiciones iniciales** " del problema , se conoce la siguiente información:

$$m_M = m_1 + m_2\ ,\quad \vec{v}^{\,i}_{c.m.\ M} = \vec{0}\ ,\quad \vec{v}_3^{\,i} \neq \vec{0}\ ,\quad \vec{v}_3^{\,f} = \vec{0}\ ,\quad \vec{v}^{\,f}_{c.m.\ M} \neq \vec{0}$$

Sustituyendo en la expresión de la conservación del momento lineal,

$$m_3\,\vec{v}_3^{\,i} + m_M\,\vec{0} = m_3\,\vec{0} + m_M\,\vec{v}^{\,f}_{c.m.\ M}$$

o sea que;

$$m_3\,\vec{v}_3^{\,i} = m_M\,\vec{v}^{\,f}_{c.m.\ M} \qquad (\ 2\ )$$

en donde,

$$\vec{v}_3^{\,i} = \begin{pmatrix} v_3^{\,i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{v}^{\,f}_{c.m\ M} = \begin{pmatrix} v^{\,f}_{M\,x} \\ v^{\,f}_{M\,y} \\ v^{\,f}_{M\,z} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto se tiene que :

$$m_3 \begin{pmatrix} v_3^{i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = m_M \begin{pmatrix} v_{M\,x}^{f} \\ v_{M\,y}^{f} \\ v_{M\,z}^{f} \end{pmatrix}$$

Lo cual implica que se cumple lo siguiente:

$$m_3\, v_3^{i} = m_M\, v_{M\,x}^{f}$$

$$0 = m_M\, v_{M\,y}^{f}$$

$$0 = m_M\, v_{M\,z}^{f}$$

Así finalmente se encuentra que;

$$m_3\, v_3^{i} = m_M\, v_{M\,x}^{f} \qquad (3)$$

Siendo esta toda la información que se puede determinar con la conservación del momento lineal.

Ahora veremos lo que se puede encontrar a partir del principio de conservación de la energía.

Debido a que la **fuerza total** externa sobre el sistema es **cero**, se cumple que:

$$E^{inicial} = E^{final}$$

donde:

$$E^{inicial}_{Sistema} = E^{i}_{cinet.} + E^{i}_{Poten.} = E^{i}_{cin.trasl} + E^{i}_{cin.Rot.} + E^{i}_{Poten}$$

$$E^{final}_{Sistema} = E^{f}_{cinet.} + E^{f}_{Poten.} = E^{f}_{cin.trasl} + E^{f}_{cin.Rot} + E^{f}_{Poten}$$

Como el movimento es en un plano la energía potencial no experimenta cambio alguno tanto antes como después de la colisión.

Lo cual implica que se cumple lo siguiente:

$$E^{i}_{Poten.} = E^{f}_{poten.}$$

Así que entonces la conservación de la energía se expresa como;

$$E^{i}_{cin\ trasl} + E^{i}_{cin\ Rot} = E^{f}_{cin\ trasl} + E^{f}_{cin\ Rot} \qquad (5)$$

Pero las condiciones iniciales del problema, $\vec{v}_{c.m.\ M} = \vec{0}$, $\vec{\omega}_M^{\,i} = \vec{0}$, $\vec{v}_3^{\,f} = \vec{0}$, $\vec{\omega}_M^{\,f} \neq \vec{0}$; simplifican la ecuación que expresa la conservación de la energía.

$$E^{i}_{cin.tras\,l} = 1/2\ m_3 v_3^{i\,2} + 1/2\ m_M\ v_{c.m\ M}^{i\,2} = 1/2\ m_3\ v_3^{i\,2}$$

$$E^{i}_{cin.Rot} = 1/2\ I_M\ \omega_M^{i\,2} = 0$$

$$E^{f}_{cin.trasl} = 1/2\ m_3\ v_3^{f\ 2} + 1/2\ m_M\ v^{f\ 2}_{c.m.\ M} = 1/2\ m_M\ v^{f\ 2}_{c.m\ M}$$

$$E^{f}_{cin\ Rot} = 1/2\ I_M\ \omega^{f\ 2}_M$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación (5) se encuentra:

$$1/2\ m_3\ v_3^{i\ 2} = 1/2\ m_M\ v^{f\ 2}_{c.m.\ M} + 1/2\ I_M\ \omega^{f\ 2}_M$$

$$m_3\ v_3^{i\ 2} = m_M\ v^{f\ 2}_{c.m.\ M} + I_M\ \omega^{f\ 2}_M \qquad (6)$$

En dicha expresión I_M= **momento de inercia de la mancuerna** , respecto al " *centro de masa de la mancuerna* ".

$$I_M = m_1\left(4/7\ D\right)^2 + m_2\left(3/7\ D\right)^2 = \left(16\ m_1 + 9\ m_2\right)\frac{D^2}{49} \qquad (7)$$

Así que, sustituyendo (7) en (6) se tiene,

$$m_3\ v_3^{i\ 2} = m_M\ v^{f\ 2}_{c.m.\ M} + \left(16\ m_1 + 9\ m_2\right)\frac{D^2\ \omega^{f\ 2}_M}{49} \qquad (8)$$

Sustituyendo la expresión determinada para m_3 , ecuación (3), en la ecuación (8); encontramos que :

$$m_3 = (m_1 + m_2)\ \frac{v^{f}_{Mx}}{v^{i}_3} = (m_1 + m_2)\ \frac{v^{f}_{c.m\ M}}{v^{i}_3}$$

$$(m_1+m_2)\ \frac{v^{f}_{M\ x}}{v^{i}_{M}}\ v_3^{i\ 2} = (m_1 + m_2)\ v^{f\ 2}_{c.m\ M} + (16m_1+9m_2)\ \frac{D^2\omega^{f\ 2}_M}{49}$$

$$v_3^{i}\ v^{f}_{c.m\ M} = v^{f\ 2}_{c.m\ M} + (16\ m_1 + 9\ m_2)\ /\ (m_1+ m_2)\ \frac{D^2\omega^{f\ 2}_M}{49}$$

$$v^{f\ 2}_{c.m\ M} - v_3^{i}\ v^{f}_{c.m\ M} + (16\ m_1+ 9m_2)\ /\ (m_1+ m_2)\ \frac{D^2\ \omega^{f\ 2}_M}{49} = 0$$

$$(9)$$

Veamos ahora la información que nos puede proporcionar el principio de conservación del momento angular total del sistema.

$$\vec{L}^{inicial}_{o\ Sist} = \vec{L}^{final}_{o\ Sist}$$

$\vec{L}^{inicial}_{O\ Sist}$=momento angular inicial del sistema respecto al punto"O".

$\vec{L}^{final}_{O\ Sist}$=momento angular final del sistema respecto al punto "O".

$$\vec{L}^{inicial}_{Sist} = \vec{L}^{inicial}_{m_3} + \vec{L}^{inicial}_{Mancuerna}$$

$$\vec{L}^{\,final}_{Sist} = \vec{L}^{\,final}_{m_3} + \vec{L}^{\,final}_{Mancuerna}$$

Por comodidad elegimos, como punto de observación, el centro de masa de la mancuerna (c.m. M); para la determinación de la conservación del momento angular total del sistema. Luego entonces se tiene,

$$\vec{L}^{\,inicial}_{(c.m.\ M)\ Sist} = \vec{L}^{\,final}_{(c.m.\ M)\ Sist} \qquad (10)$$

$$\vec{L}^{\,inicial}_{(c.m.\ M)\ Sist} = \vec{L}^{\,inicial}_{(c.m.\ M)\ m_3} + \vec{L}^{\,inicial}_{(c.m.\ M)\ Mancuerna}$$

$$\vec{L}^{\,inicial}_{(c.m.\ M)\ m_3} = \vec{r}_3^{\,i} \times \vec{p}_3^{\,i} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\ 5/28\ D \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_3^{\,i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5/28\ D\ v_3^{\,i} \end{pmatrix}$$

$$\vec{L}^{\,inicial}_{(c.m.\ M)\ Manc} = I_M\ \vec{\omega}^{\,inic}_{manc} = I_M\ \vec{0} = \vec{0}$$

$$\vec{L}^{\,inicial}_{(c.m.\ M)\ Sist} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5/28\ D\ v_3^{\,i} \end{pmatrix}$$

$$\vec{L}^{\,final}_{(c.m.\ M)\ Sist} = \vec{L}^{\,final}_{(c.m.\ M)\ m_3} + \vec{L}^{\,final}_{(c.m.\ M)\ Manc}$$

$$\vec{L}^{\,final}_{(c.m\ M)\ m_3} = \vec{r}_3^{\,f} \times \vec{p}_3^{\,f} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\ 5/28\ D \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\vec{L}^{\,final}_{(c.m\ M)\ Manc.} = I_{Manc}\ \vec{\omega}^{\,f}_{Manc} = (16\ m_1 + 9\ m_2)\frac{D^2}{49}\ \vec{\omega}^{\,f}_{m}$$

$$\vec{L}^{\,inicial}_{(c.m\ M)\ Sist} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5/28\ D\ v_3^{\,i} \end{pmatrix} = I_{Manc} \begin{pmatrix} \omega^f_{M\ x} \\ \omega^f_{M\ y} \\ \omega^f_{M\ z} \end{pmatrix} = \vec{L}^{\,final}_{(c.m\ M)\ Sist} \qquad (11)$$

Esto implica que:

$$I_{Manc}\ \omega^f_{M\ x} = 0$$

$$I_{Manc}\ \omega^f_{M\ y} = 0$$

$$I_{Manc}\ \omega^f_{M\ z} = 5/28\ D\ v_3^{\,i}$$

$$\omega^{f}_{M\,z} = 5/28\ \frac{D\ v^{1}_{3}}{I_{M}}$$

$$\omega^{f}_{M\,z} = 5/28\ D\left(\frac{1}{16\ m_1 + 9\ m_2}\right)\left(\frac{49\ v^{1}_{3}}{D^{2}}\right) \qquad (12)$$

$$\boxed{\omega^{f}_{M\,z} = 245/28\ \frac{v^{1}_{3}}{D\ (16\ m_1 + 9\ m_2)}}$$

Sustituyendo los datos numéricos del problema determinamos el valor de la velocidad angular, con la cual gira la mancuerna alrededor del su centro de masa, después de experimentar la colisión.

$$\omega^{f}_{M\,z} = \frac{(245)(15)(10)}{(84)(28)(6)} = 2.60\ \ \text{rad/s}$$

Ahora podemos regresar a la ecuación (9) y sustituir la ecuación (12), para determinar la velocidad con que se traslada, el centro de masa de la mancuerna, después de la colisión.

$$v^{f\,2}_{c.m\ M} - v^{1}_{3}\ v^{f}_{c.m\ M} + \left(\frac{16\ m_1 + 9\ m_2}{m_1 + m_2}\right)\left(\frac{D^{2}\ v^{1\,2}_{3}\ (245)^{2}}{D^{2}(16m_1 + 9m_2)^{2}(28)^{2}49}\right) = 0$$

$$v^{f\,2}_{c.m\ M} - v^{1}_{3}\ v^{f}_{c.m\ M} + \left(\frac{(245)^{2}}{49\ (28)^{2}}\right)\left(\frac{v^{1\,2}_{3}}{(m_1 + m_2)(16m_1 + 9m_2)}\right) = 0$$

$$v^{f\,2}_{c.m\ M} - v^{1}_{3}\ v^{f}_{c.m\ M} + \mathbf{0.62} = \mathbf{0}$$

$$v^{f}_{c.m\ M} = \frac{+\ 15\ \pm\sqrt{222.52}}{2} = \begin{cases} 14.96 & m/s \\ 0.04 & m/s \end{cases}$$

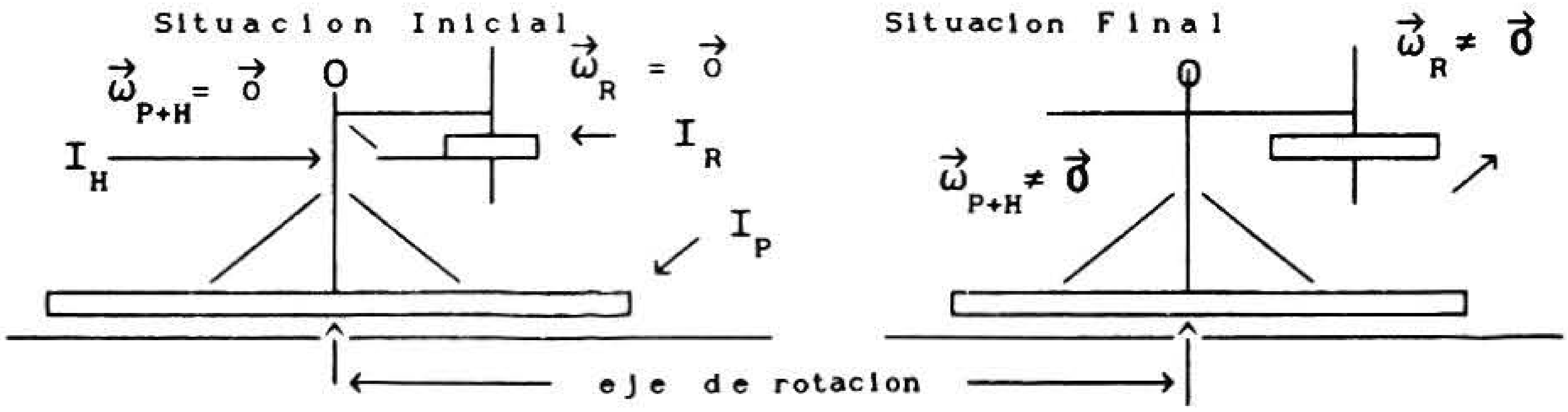
Así que sustituyendo este resultado en la expresión encontrada para la masa del cuerpo m_3, tenemos:

$$m_3 = (\ m_1 + m_2\ )\ \frac{v^{f}_{c.m\ M}}{v^{1}_{3}} = \frac{7}{15}\begin{cases}(14.96) \\ 0.04\end{cases} = \begin{cases}6.98133\ \text{kg} \\ 0.01866\ \text{kg}\end{cases}$$

• • • PROBLEMA # 14 • • •

Un hombre se coloca en el centro de una plataforma, cuyo eje de rotación es un eje vertical, y lleva en su mano una rueda cuyo eje de rotación también es vertical. Los momentos de inercia del hombre, plataforma, y rueda respecto del eje vertical son: $I_H = 5$, $I_P = 7$ y $I_r = 2$ ($Kg.m^2$ respectivamente). El hombre, que se encuentra unido rígidamente a la plataforma , le comunica a la rueda una velocidad angular de rotación de **120** rev/min . Determinar: **a**) Qué velocidad angular de rotación adquieren el hombre y la plataforma, como consecuencia de la rotación de la rueda, **b**) supóngase que la fuerza ejercida por el hombre es constante y que actúa un tiempo igual a **1/10** seg. c) calcule la energía cinética adquirida por el sistema después del tiempo especificado.

SOLUCION



DATOS

ω = 120 rev/min = 4π rad/seg =12.56 rad/s.

$I_H = 5\ Kg\ m^2$, $I_P = 7\ kg\ m^2$, $I_R = 2\ kg\ m^2$

INCOGNITAS

a) $\vec{\omega}^{\,f}_{P+H} = ?$

b) $\vec{\tau}_H = ?$

c) $E^{final}_{cin} = ?$

Debido a que la fuerza aplicada por el hombre, sobre la rueda, se deberá considerar como una fuerza interna al sistema, formado por los cuerpos; Plataforma, Hombre, y Rueda .

Aplicaremos el principio de conservación del momento angular total. Para que esto sea realizable se tendrá que cumplir la condición siguiente; que el punto de suspensión de la plataforma no ejerza fuerza alguna que altere la condición de la conservación del momento angular total del sistema (*friccion despreciable*)..

Además también se cumple el teorema del Trabajo y la Energía para el sistema en consideración.

Así que la solución está dada poß las siguientes expresiones:

$$\vec{L}^{\,inicial}_{Sistem.} = \vec{L}^{\,final}_{Sistem.}$$

$$W = \Delta E = E^{final} - E^{inicial}$$

$$\vec{L}_{Sistem} = \vec{L}_R + \vec{L}_H + \vec{L}_P = I_R\,\vec{\omega}_R + I_H\,\vec{\omega}_H + I_P\,\vec{\omega}_P$$

Como la plataforma y el hombre se encuentran unidos rígidamente, al girar la rueda en alguna dirección, ambos se moverán con la misma velocidad angular de rotación, o sea $\vec{\omega}_h = \vec{\omega}_P = \vec{\omega}_{P+H} = \vec{\omega}$, respecto al eje vertical de giro , pero en dirección contraria a la rotación experimentada por la rueda.

$$\vec{L}_{Sistem} = I_R\,\vec{\omega}_R + (I_H + I_P)\,\vec{\omega}$$

Pero, por las *condiciones iniciales*, del problema $\vec{\omega}_R^{\,i} = \vec{0}$, $\vec{\omega}_{P+H}^{\,i} = \vec{0}$

Así que $\vec{L}^{\,inic.}_{Sistem} = I_R\,\vec{\omega}_R^{\,i} + (I_H + I_P)\,\vec{\omega}_{p+H}^{\,i} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$

$$\vec{L}^{\,inic.}_{Sistem} = \vec{0}\,.$$

En la situación final, después de que el hombre le comunica la velocidad angular $\vec{\omega}_R^{\,f}$ a la rueda , la plataforma más el hombre adquieren cierta velocidad angular, la cual se determinará de acuerdo con la conservación del momento angular del sistema.

$$\vec{L}^{\,final}_{Sistem} = I_R\,\vec{\omega}_R^{\,f} + (I_H + I_P)\,\vec{\omega}_{P+H}^{\,f}\,.$$

Por lo tanto, entonces, se tiene que:

$$\vec{0} = I_R\,\vec{\omega}_R^{\,f} + (I_P + I_H)\,\vec{\omega}_{P+H}^{\,f}$$

$$\vec{\omega}_{P+H}^{\,f} = -\frac{I_R}{I_H + I_P}\,\vec{\omega}_R^{\,f} \qquad (1)$$

Donde el vector de velocidad angular $\vec{\omega}_R^{\,f}$está dado por: $\vec{\omega}_R^{\,f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_R \end{pmatrix}$

Luego, si se sustituye en la ecuación anterior (1) , encontramos:

$$\vec{\omega}_{P+H}^{\,f} = -\frac{I_R}{I_P + I_H}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_R^f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{I_R}{I_P + I_H}\,\omega_R^f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{3}\,\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2.1 \end{pmatrix} \text{rad/s}$$

Usando la segunda ley de Newton, en las variables angulares, se responderá la segunda cuestión, ya que como se sabe ésta gobierna la variación del momento angular , y este es proporcional con el momento producido por la fuerza, así que entonces:

$$\vec{\tau}_{Sistem} = \frac{\Delta \vec{L}_{Sist}}{\Delta t} = I_{Sistem.} \vec{\alpha}_{Sistem.}$$

$$\vec{\tau}^{\,ext.}_{Sist.} = \vec{0}$$

Además, los momentos producidos internamente, para no alterar el equilibrio del sistema, son tales que:

$$\vec{\tau}^{\,int}_{Sist} = \vec{\tau}_R + \vec{\tau}_{P+H} = \vec{0}$$

Donde $\vec{\tau}_R$ es el momento producido por la fuerza aplicada por el hombre sobre la rueda. Y $\vec{\tau}_{P+H}$ es el momento producido por la rueda sobre el hombre más la plataforma.
Por lo tanto el momento aplicado por el hombre, de acuerdo con la segunda ley de Newton es

$$\vec{\tau}_R = I_R \vec{\alpha}_R = I_R \frac{\Delta \vec{\omega}_R}{\Delta t}$$

$$\Delta \vec{\omega}_R = \vec{\omega}_R^{\,f} - \vec{\omega}_R^{\,i} = \vec{\omega}_R^{\,f} - \vec{0} = \vec{\omega}_R^{\,f}$$

$$\Delta t = t^f - t^i = t^f - 0 = t^f = (\,1/10\,) \text{ seg.}$$

$$\vec{\tau}_R = I_R \frac{\vec{\omega}_R^{\,f}}{\Delta t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -42 \end{pmatrix} \qquad \tau_R = 42 \text{ N.m.}$$

La energía cinética adquirida por el sistema está dada por

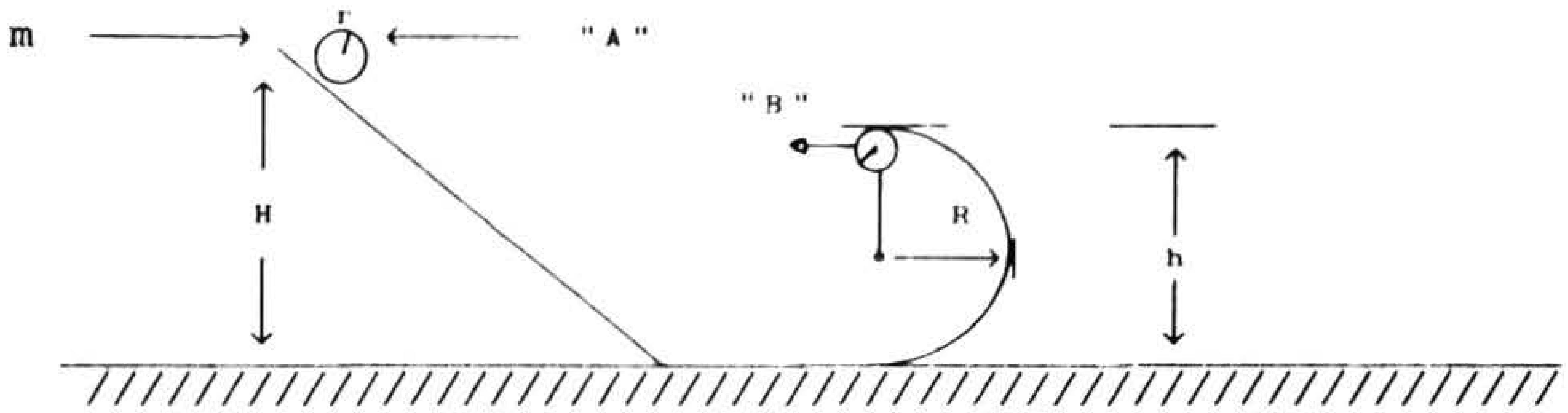
$$E^{final}_{cinet} = E^{final}_{cinet.\ R} + E^{final}_{cinet.(\ P+h\ )}$$

$$E^{final}_{cinet} = 1/2\ I_R\ \omega_R^{f\ 2} + 1/2\ (\ I_P + I_H\ )\ \omega_{R+H}^{f\ 2}$$

$$\boxed{E^{final}_{cinet.} = (\ 16 + 8/3\ )\ \pi^2 = 184.23 \text{ Joules.}}$$

• • • PROBLEMA # 15 • • •

Un cuerpo esférico se libera en la posición mostrada, en la figura, con el punto **"A"**.
El cuerpo rueda hacia abajo, sin resbalar, determínese: **a)** la rapidéz que lleva el cuerpo cuando éste pasa por el punto **B**, **b)** y también encuentre la fuerza normal (ejercida por el camino) en dicho punto.



FIGURA

DATOS

$m = 0.1$ Kg

$H = 0.25$ m

$h = 0.2$ m.

$R = 0.05$ m.

$r = 0.01$ m.

$v_{\mathbf{A}} = 0$ m/s

$I_{c.m.} = 2/5\ m\ r^2$

INCOGNITAS

a) $v_{\mathbf{B}} = ?$

b) $N_{\mathbf{B}} = ?$

Debido a que el cuerpo esférico realiza un rodamiento puro, la fuerza de fricción no realiza trabajo mecánico sobre el mismo.
Por lo que se cumple la relación $v_{c.m.} = \omega\ r.$
Ahora bien, entre los puntos **A** y **B**, se cumple la ley de conservación de la energía. Eligiendo, como referencia del nivel de potencial, la superficie del piso; se tiene:

$$E = E_{pot} + E_{cin\ trasl} + E_{cin\ Rot}$$

En el punto **A** la energía es puramente potencial, está en reposo.

$$E^{\mathbf{A}} = E^{\mathbf{A}}_{pot} + E^{\mathbf{A}}_{cin.Tras} + E^{\mathbf{A}}_{cin.\ Rot} = mg(H-r) + 1/2\ m\ v_{A}^{2} + 1/2\ I\ \omega_{A}^{2}$$

$$E^{\mathbf{A}} = m\ g(H-r)$$

En el punto **B** la energía que tiene el cuerpo es de los siguientes tipos: potencial, cinética traslacional, y cinética rotacional.

$$E^{B} = E^{B}_{pot} + E^{B}_{cin.Tras} + E^{B}_{cin.Rot} = mg(h-2r) + 1/2\ m\ v_B^{2} + 1/2\ I\ \omega_B^{2}$$

Así por la conservación de la energía se tiene:

$$E^{A} = E^{B}$$

$$m\ g(H-r) = m\ g\ (h-2r) + 1/2\ m\ v_B^{2} + 1/2\ I\ \omega_B^{2}$$

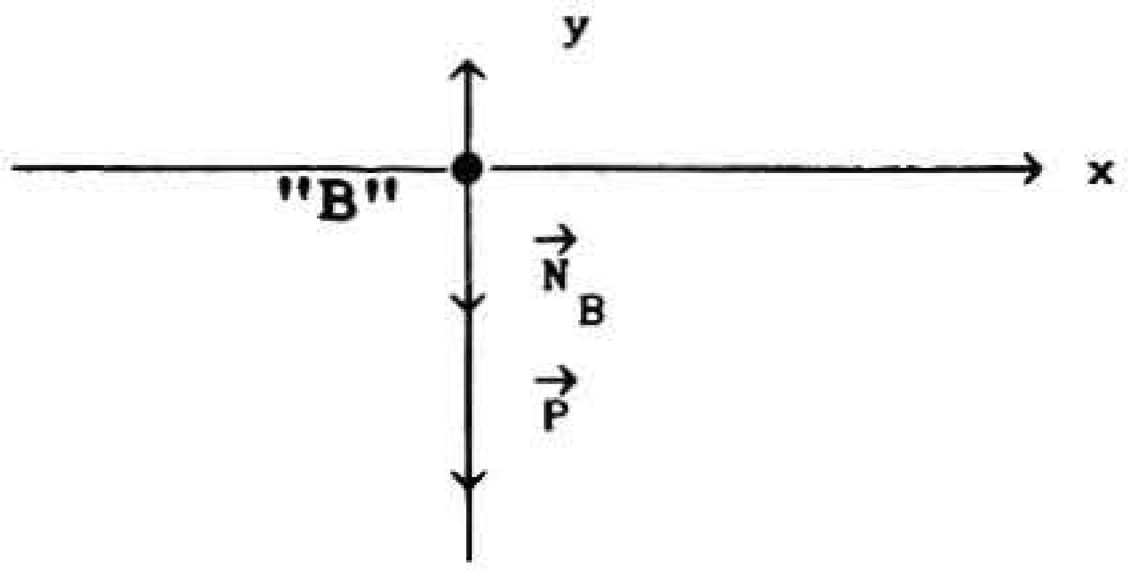
$$v_B = \omega_B\ r$$

$$m\ g(H-r) = m\ g\ (h-2r) + 1/2\ m\ v_B^{2} + 1/2\left(2/5\ m\ r^{2}\right)\left(\frac{v_B}{r^{2}}\right)^{2}$$

Simplificando la expresión anterior, determinamos la rapidéz en el punto **B**.

$$v_B = \sqrt{\frac{10}{7}\ g(H-h+r)} = 0.916\ m/s$$

Para determinar cual es la fuerza normal en el punto **B** construiremos un diagrama de cuerpo libre en dicho punto.



La fuerza resultante de éstas será la fuerza centrípeta, (*dirigida hacia el centro de curvatura*).

$$\vec{N}_B + \vec{P} = \vec{F}_c$$

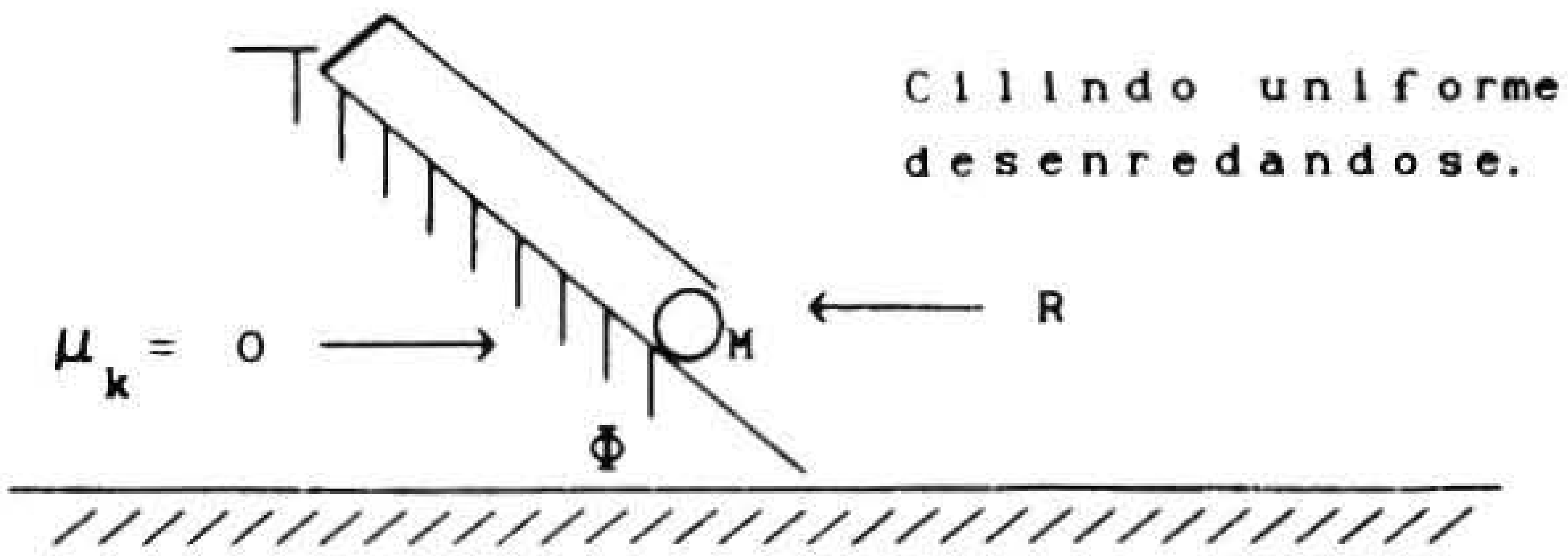
$$\begin{pmatrix} 0 \\ -N_B \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F_c \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-N_B - P = -F_C$$

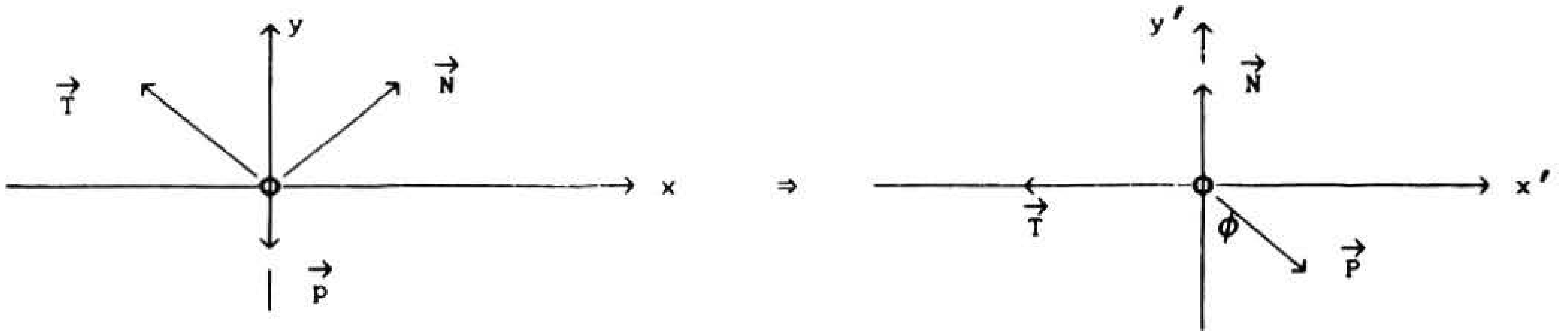
$$\boxed{N_B = F_c - P = -m\ g + m\left(\frac{v_B^{2}}{(R-r)}\right) = 1.117\ N.}$$

• • • PROBLEMA # 16 • • •

Determinar las ecuaciones de movimiento, así como las relaciones cinemáticas necesarias para encontrar la aceleración del cuerpo rígido mostrado en la figura.



FIGURA



DATOS

$M=5$ kg

$R=0.2$ m

$\phi = 30^\circ$

INCOGNITAS

$\vec{a}_{c.m.} = ?$

$\vec{\alpha} = ?$

Ecs. de Mov.=?

Rels. Cinem.=?

La solución del problema se encuentra en base a la segunda ley de Newton tanto en las variables lineales como en las variables angulares. Estando ésta expresada como :

$$\vec{F}_T = M\,\vec{a}_{c.m.} \qquad\qquad \vec{\tau}_T = I\,\vec{\alpha}$$

En estas expresiones, $\vec{F}_T$ y $\vec{\tau}_T$ representan la fuerza total externa , así como la torca total , a la cual se encuentra sometido el cilindro.

De acuerdo con el diagrama de cuerpo libre las fuerzas a las cuales se encuentra sometido el cilindro son : la tensión de la cuerda, la fuerza normal (ejercida por el plano) , y el peso del cilindro (fuerza ejercida por la tierra).

Debido a que el peso es una fuerza que se considera actúa en el centro de masa del cilindro, el brazo de palanca asociado al mismo es cero, similarmente la fuerza normal es una fuerza cuya línea de acción pasa por el centro de masa, siendo su brazo de palanca igual a cero. La fuerza de tensión es una fuerza que actúa en el borde (*periferia*) del cilindro, por lo cual el brazo de palanca para esta es igual al radio del cilindro. Luego entonces las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico de este sistema son:

$$\vec{F}_{Tot} = \vec{T} + \vec{N} + \vec{P}$$

$$\vec{\tau}_{Tot} = \vec{\tau}_T + \vec{\tau}_N + \vec{\tau}_P$$

Donde las torcas están expresadas por:

$$\vec{\tau}_T = \vec{r}_T \times \vec{T}, \qquad \vec{\tau}_N = \vec{r}_N \times \vec{N}, \qquad \vec{\tau}_P = \vec{r}_P \times \vec{P}.$$

Veamos como están expresados los brazos de palanca en ésta situación, así como también las fuerzas correspondientes.

$$\vec{r}_T = \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ -R \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{r}_P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} -T \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ N \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{P} = \begin{pmatrix} P\text{sen}\phi \\ -P\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo estos vectores en la expresión de la torca total se tiene:

$$\vec{\tau}_{Tot} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -T \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -R \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ N \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} P\text{sen}\phi \\ -P\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\tau}_{Tot} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ RT \end{pmatrix}$$

Veamos, ahora, cual es la fuerza total que actúa sobre el cilindro

$$\vec{F}_{Tot} = \begin{pmatrix} -T \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ N \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P\text{sen}\phi \\ -P\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T+P\text{sen}\phi \\ N-P\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego, entonces , el vector de aceleración puede ser determinado de la expresión de la segunda ley de Newton, (lineal y angular) .

$$\vec{a}_{c.m.} = \frac{1}{M}\begin{pmatrix} P\text{sen}\phi - T \\ N - P\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{\alpha} = \frac{1}{I_{c.m.}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R\,T \end{pmatrix}$$

Pero como el movimiento realizado por el cilindro es tal que este no se puede despegar (*liberarse de la superficie del plano*) cuando rueda hacia abajo del mismo, la aceleración lineal y angular del cilindro se simplifican, como se muestra en la siguiente expresión:

$$\vec{a}_{c.m.} = \begin{pmatrix} g\,sen\phi - T \\ (N - Mg\cos\phi)/M \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{c.m.} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$\vec{\alpha} = (2/M\,R^2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R\,T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix} \qquad (2)$$

por la relación, que existe, entre las variables lineales y angulares sabemos que:

$$a_{c.m.} = R\,\alpha \qquad (3)$$

Las ecuaciones (1),(2) y (3) se simplifican en:

$$\alpha = \frac{2T}{MR} \qquad a_{c.m} = 2/3\ g\ sen\phi\ , \qquad \alpha = a_{c.m.}/R = \frac{2\ g\ sen\phi}{3\ R}$$

Sustituyendo los datos numéricos del problema encontramos los valores numéricos de las aceleraciones lineal y angular:

$$a_{c.m.} = 3.27\ m/s^2 \qquad \alpha = 16.3\ rad/s^2$$

Las relaciones cinemáticas, se determinan integrando, tanto la aceleración lineal como la aceleración angular (constantes).

$$v_{c.m}(t) = \int a_{c.m.}\,dt = \left(\frac{2}{3}\ g\,sen\phi\right) t - v_{c.m.}(t{=}0)$$

$$\omega(t) = \int \alpha\ dt = \left(\frac{2\ g}{3\ R}\ sen\phi\right) t - \omega\ (t{=}0)$$

$$r_{c.m}(t) = (\tfrac{1}{3}) g\ sen\phi\ t^2 - v_{c.m.}(t{=}0)\ t + r_{c.m}(t{=}0)$$

$$\theta(t) = (\tfrac{1}{3})\frac{g}{R}\ sen\phi\ t^2 - \omega(t{=}0)\ t + \theta(t{=}0)$$

Observacion: Estas expresiones finales no pueden especificarse de manera mas simplificada ya que el problema no dice nada acerca de las condiciones iniciales del problema.

• • • PROBLEMA # 17 • • •

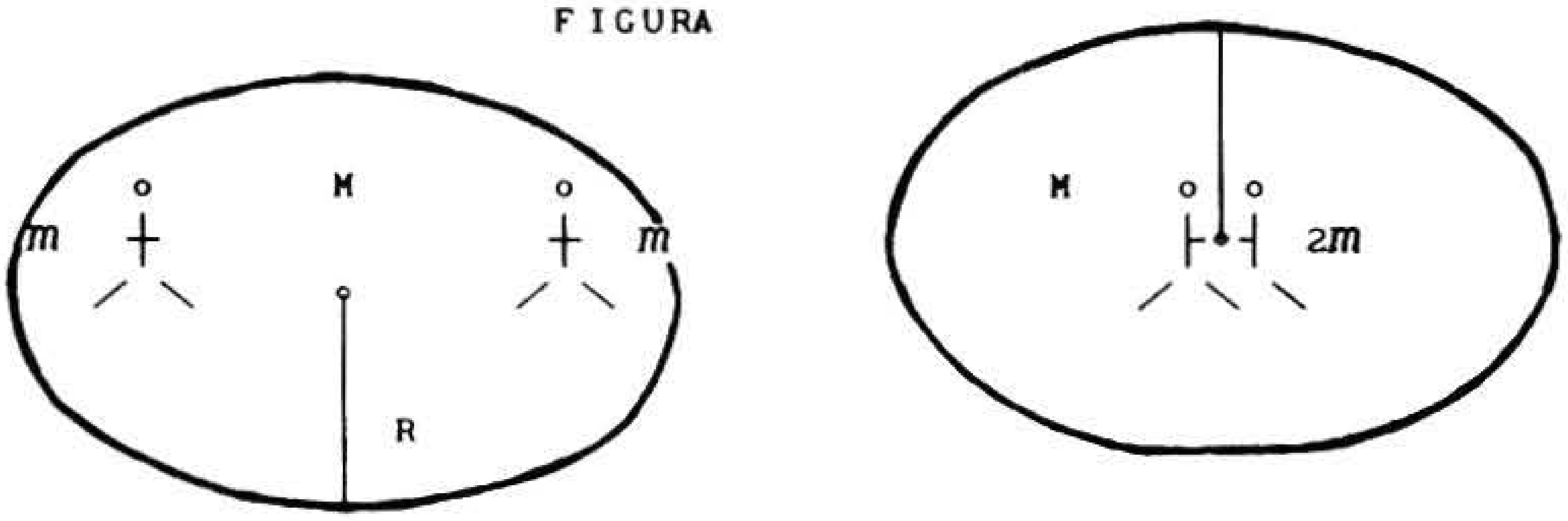
Dos personas de igual masa m se encuentran localizadas en la periferia de una plataforma circular **Aislada** (*ver la figura*). La cual inicialmente gira con una velocidad angular ω. En un mismo instante de tiempo estos comienzan a caminar hacia el centro de la plataforma, la cual tiene un radio R , y se abrazan. *DETERMINE:*

a).- La velocidad angular final ω_f cuando las dos personas se encuentran abrazadas (en el centro).

b).-El cambio experimentado por la energía cinética del sistema,

c).-El trabajo realizado **sobre** la plataforma.

FIGURA



DATOS

M = 300 kg

m = 60 kg

R = 0.6 m.

ω_i = 5 rad/s.

INCOGNITAS

a) ω_f = ?

b) $\Delta E_{cin.}$ = ?

c) $W_{\text{sobre la plataf.}}$ = ?

SOLUCION

La solución del problema se realiza en base a la aplicación del principio de conservación del momento angular, debido a que el sistema se encuentra aislado, y no existen torcas aplicadas externamente sobre el sistema (personas + plataforma).

Así que se cumple lo siguiente:

$$\vec{L} = \text{Constante} \quad , \quad \forall \quad t$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{L}_i = \vec{L}_f$$

donde $\quad \vec{L}_i = I_s \vec{\omega}_i \qquad \& \qquad \vec{L}_f = I_s \vec{\omega}_f$

$$I_s = I_{pl} + I_{H\,1} + I_{H\,2}$$

$$I_{H\,1} = m\,R^2 = I_{H\,2}$$

$$I_{pl} = \frac{1}{2} M R^2$$

Aplicando la conservación del momento angular tenemos que:

$$(2 m R^2 + \frac{1}{2} M R^2) \vec{\omega}_i = \frac{1}{2} (M + 2m) R^2 \vec{\omega}_f$$

De esta expresión es posible despejar la velocidad angular con la que se encuentra girando la plataforma , al estar abrazadas las dos personas, o sea la velocidad angular $\vec{\omega}_f$.

$$\vec{\omega}_f = \frac{2 m R^2 + \frac{1}{2} M R^2}{\frac{1}{2} (M + 2 m) R^2} \vec{\omega}_i$$

$$\vec{\omega}_f = \frac{4 m + M}{2 m + M} \vec{\omega}_i$$

$$\vec{\omega}_f = \frac{9}{7} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6.42 \end{pmatrix} \text{rad/s}$$

Ahora se encontrará el cambio experimentado por la energía cinética del sistema al ir desde la configuración inicial hasta la situación final.

Inicialmente la energía que posee el sistema es energía de rotación ya que las personas están paradas en la periferia sin moverse, lo mismo sucede cuando se han encontrado en el centro de la plataforma; así que es fácil determinar el cambio experimentado por la energía cinética del sistema.

$$E^i_{cin.} = \frac{1}{2} I_s \omega_i^2 \qquad\qquad E^f_{cin.} = \frac{1}{2} I_s \omega_f^2$$

$$\Delta \mathbf{E}_{cin} = E^f_{cin} - E^i_{cin.}$$

$$-\Delta \mathbf{E}_{cin.} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} (M + 4m) R^2 \omega_i^2 - \frac{1}{2} (M + 2m) R^2 \omega_f^2\right]$$

$$-\Delta \mathbf{E}_{cin.} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} R^2 [(M + 4 m) \omega_i^{\,2} - \left(\frac{9}{7}\right)^2 (M + 2m) \omega_i^2]\right]$$

$$\Delta \mathbf{E}_{cin.} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{49} \right) \omega_i^2 R^2 (32 M - 34m)$$

$$\Delta \mathbf{E}_{cin.} = 347.142 \text{ J.}$$

La última pregunta planteada en el problema, se responderá en base al principio de conservación de la energía mecánica total del sistema, el cual sabemos establece lo siguiente:

El trabajo total, realizado por las fuerzas (*externas e internas*) en el sistema, es igual al cambio experimentado por la energía cinética del sistema.

$$W_T(i \longrightarrow f) = \Delta E_{cin.} \Big|_i^f$$

Ahora bien debido al hecho de que el sistema está aislado, esto quiere decir que no existen acciones externas, se tiene que el trabajo realizado sobre la plataforma es efectuado por fuerzas de orígen interno al sistema. Así el teorema del *Trabajo-Energía* se expresa de la siguiente manera:

$$W_T(i \longrightarrow f) = W_{EXT}(i \longrightarrow f) + W_{INT}(i \longrightarrow f) =$$

$$= E^f_{cin.} - E^i_{cin} = \Delta E_{cin.} \Big|_i^f$$

Pero, $W_{EXT}(i \longrightarrow f) = 0$ (sistema aislado)

Así el trabajo realizado sobre la plataforma resulta ser:

$W_{INT}(i \longrightarrow f)$ = TRABAJO REALIZADO SOBRE LA PLATAFORMA.

$$W_{Plat.}(i \longrightarrow f) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{49}\right)\omega_i R^2 (32M - 34m)$$

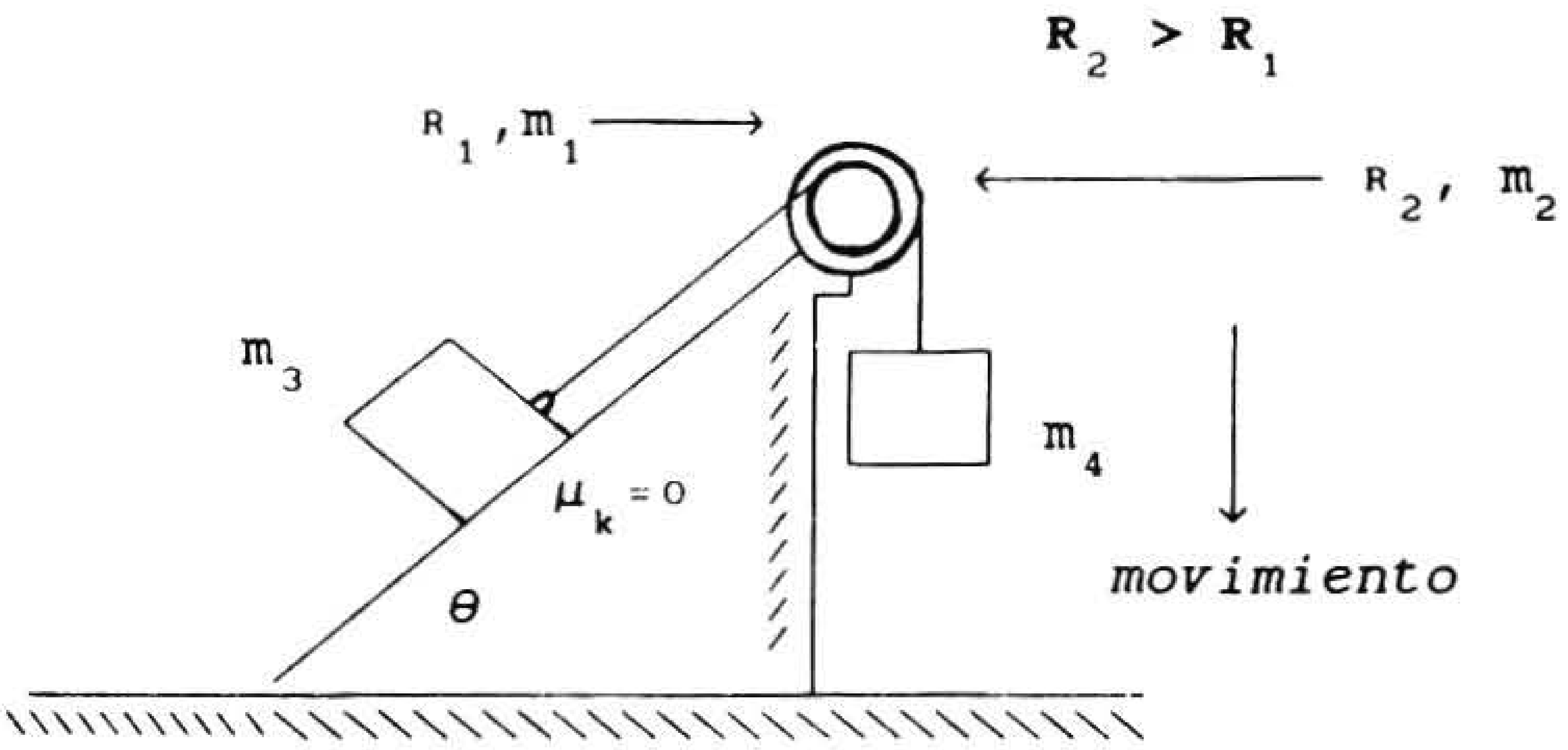
$$W_{Plat.}(i \longrightarrow f) = \text{[illegible]}14.142 \text{ J.}$$

• • • PROBLEMA # 18 • • •

En el sistema mostrado en la figura , se tiene un sistema de dos poleas en forma de discos, unidos concéntricamente con radios R_1 y R_2, la **unión** es **rígida** entre las poleas. Si las masas de las cuerdas es despreciable y son inextensibles, no resbalan sobre las poleas, y además no existe fricción entre la superficie del plano y el cuerpo m_3 . *CALCULE:*

a) La aceleración lineal adquirida por cada uno de los cuerpos, y la aceleración angular de las poleas;
b) La tensión que se genera en cada una de las cuerdas del sistema.

FIGURA

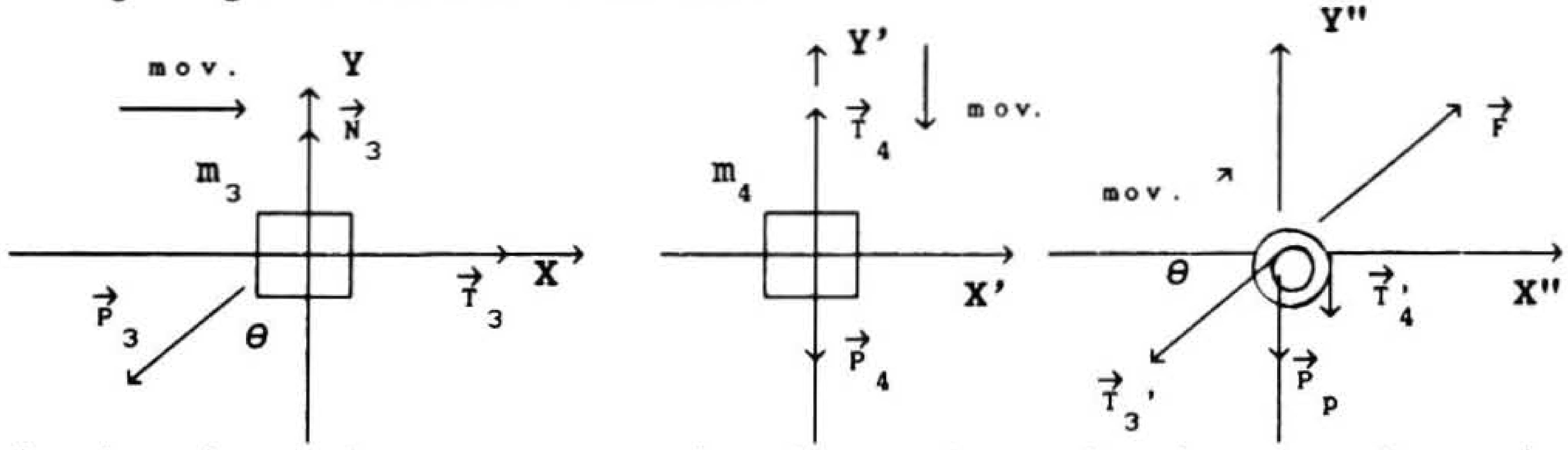


DATOS	INCOGNITAS
R_1, R_2	$\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$
m_1, m_2	α_1, α_2
m_3, m_4	$\vec{T}_3$, $\vec{T}_4$
θ , g	

SOLUCION

La descripción del movimiento requiere que sean planteadas ecuaciones a partir de la segunda ley de Newton tanto para las cantidades lineales como para las angulares. Por comodidad primero abordaremos el problema de las cantidades lineales.
Construyamos el diagrama de cuerpo libre para cada uno de los

cuerpos que forman el sistema.



$$\vec{T}_3 + \vec{P}_3 + \vec{N}_3 = m_3\vec{a}_3 \qquad \vec{T}_4 + \vec{P}_4 = m_4\vec{a}_4 \qquad \vec{T}_3' + \vec{T}_4' + \vec{P}_p + \vec{F} = m_p\vec{a}_p$$

$$\vec{\tau}_T = I\,\vec{\alpha}$$

Para cada cuerpo, se plantea la segunda ley de Newton ; lo cual nos da las siguientes ecuaciones:

$$T_3 - P_3 \operatorname{sen}\theta = m_3 a_3 \qquad N_3 - P_3\cos\theta = 0$$

$$P_4 - T_4 = m_4 a_4$$

$$T_3' \cos\theta + F_x = 0 \qquad T_3' \operatorname{sen}\theta + T_4' + P_p - F_y = 0$$

La segunda ley de Newton para las variables angulares se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$\vec{\tau}_T = \vec{\tau}_3 + \vec{\tau}_4 = I\,\vec{\alpha}$$

$$R_1T_3 - R_2T_4 = -I\,\alpha = -(I_1 + I_2)\,\alpha = 1/2\,[\,m_1R_1^2 + m_2R_2^2]\,(-\alpha)$$

Ahora bien, la aceleración angular α del sistema de poleas es única ; ya que la unión es rígida entre los discos del sistema de poleas. Esto tiene como consecuencia que se cumplan las siguientes relaciones

$$\alpha = \frac{a_1}{R_1} \qquad \alpha = \frac{a_2}{R_2}$$

Así que, las ecuaciones que gobiernan la dinámica de este sistema son las siguientes:

$$T_3 - m_3 g \operatorname{sen}\theta = m_3 a_3 \qquad m_4 g - T_4 = m_4 a_4$$

$$R_2T_4 - R_1T_3 = 1/2\,[\,m_1R_1^2 + m_2R_2^2]\,\alpha$$

$$a_1 = a_3 \quad \& \quad a_2 = a_4$$

$$T_3\cos\theta + F_x = 0 \qquad T_3 \operatorname{sen}\theta + T_4 + P_p - F_y = 0$$

Este sistema se transforma en las siguientes ecuaciones

$$T_3 = m_3 R_1 \alpha + m_3 g \text{ sen } \theta \qquad\qquad T_4 = m_4 g - m_4 R_2 \alpha$$

$$- R_1 (m_3 R_1 \alpha + m_3 g \text{ sen } \theta) + R_2 (m_4 g - m_4 R_2 \alpha) = \frac{1}{2} (m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2) \alpha$$

De esta última expresión se puede despejar la aceleración angular α.

$$\alpha = \frac{- m_3 R_1 \text{ sen } \theta + m_4 R_2}{[m_3 + (1/2)m_1] R_1^2 + [m_4 + (1/2) m_2] R_2^2} \, g$$

Inmediatamente quedan determinadas las aceleraciones lineales a_1 y a_2.

$$a_1 = R_1 \alpha = \frac{- m_3 R_1^2 \text{ sen } \theta + m_4 R_1 R_2}{[m_3 + (1/2)m_1] R_1^2 + [m_4 + (1/2)m_2] R_2^2} \, g$$

$$a_2 = R_2 \alpha = \frac{- m_3 R_1 R_2 \text{ sen } \theta + m_4 R_2^2}{[m_3 + (1/2)m_1] R_1^2 + [m_4 + (1/2)m_2] R_2^2} \, g$$

Sustituyendo α, en la expresión anteriormente encontrada de T_3, nos da el valor de T_3.

$$T_3 = \left(\frac{- m_3^2 R_1^2 \text{ sen } \theta + m_1 m_3 R_1 R_2}{[m_3 + (1/2)m_1] R_1^2 + [m_4 + (1/2)m_2] R_2^2} + m_3 \text{sen } \theta \right) g$$

$$T_4 = \left(1 + \frac{- m_4 R_2^2 + m_3 R_1 R_2 \text{ sen } \theta}{[m_3 + (1/2)m_1] R_1^2 + [m_4 + (1/2)m_2] R_2^2} \right) m_4 \, g$$

$$F_x = - T_3 \cos \theta \qquad\qquad F_y = T_3 \text{sen } \theta + T_4 + P_p$$

• • • PROBLEMA # 19 • • •

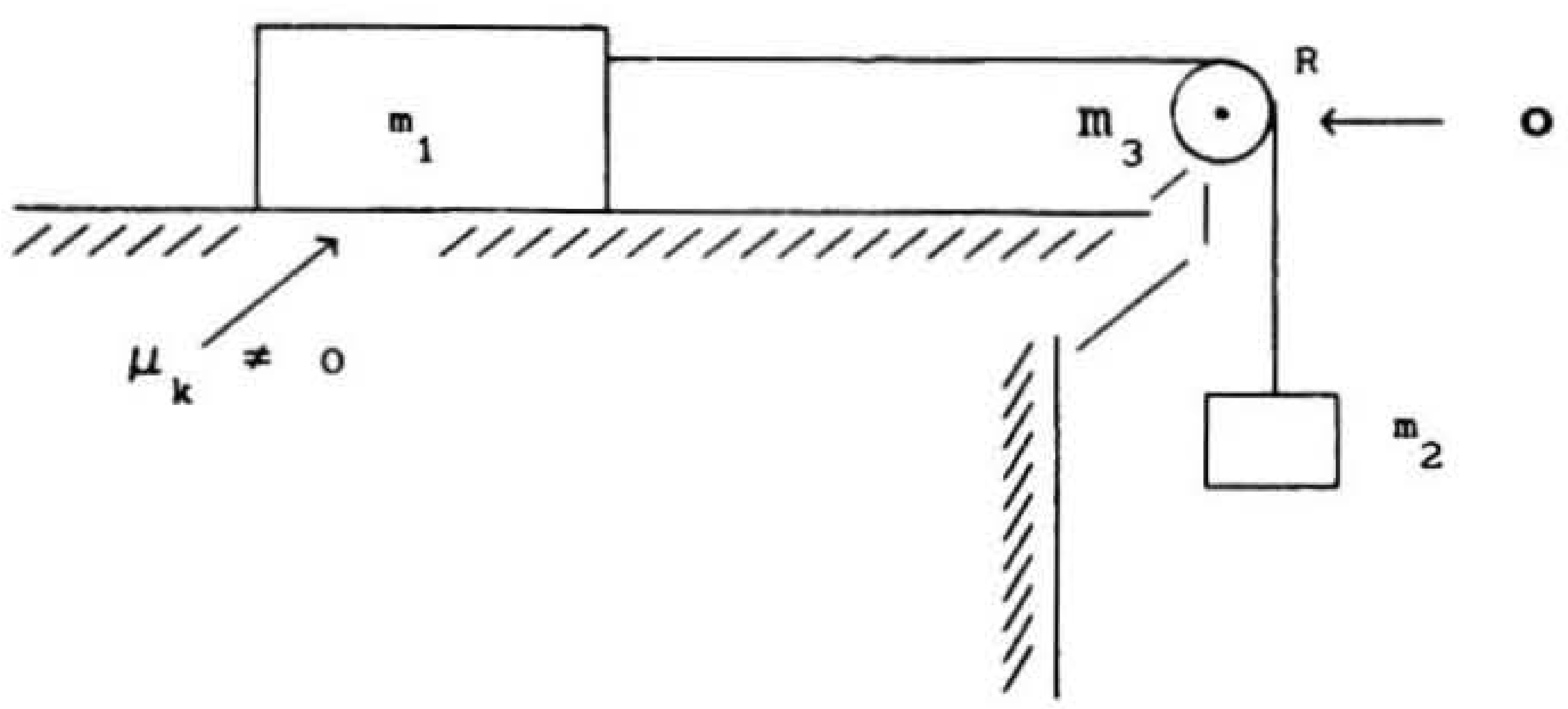
Considére el mecanismo mostrado en la figura, en este la polea puede girar libremente alrededor del punto **O**. Si la cuerda se considera ligera e inextensible, calcular:

a) La aceleración que experimenta cada uno de los bloques;

b) La tensión de la cuerda en cada lado de la polea,

c) La energía cinética de la polea cuando ésta ha girado una vuelta completa . Supónga que el sistema inicialmente se encuentra en reposo.

FIGURA



DATOS

$m_1 = 1$ kg

$m_2 = 3$ kg

$m_p = 0.5$ kg

$R = 0.05$ m

$\mu = 0.3$

$I_D = 1/2\ m\ R^2$

$V_{1i} = V_{2i} = 0$

INCOGNITAS

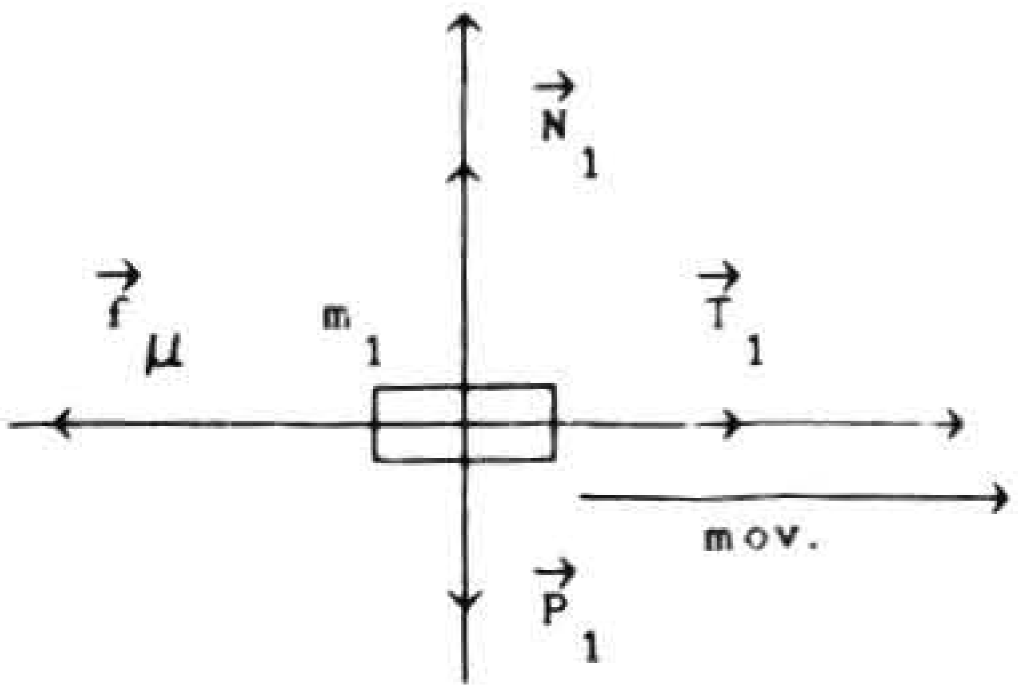
a) $\vec{a}$ = ? (de cada bloque)

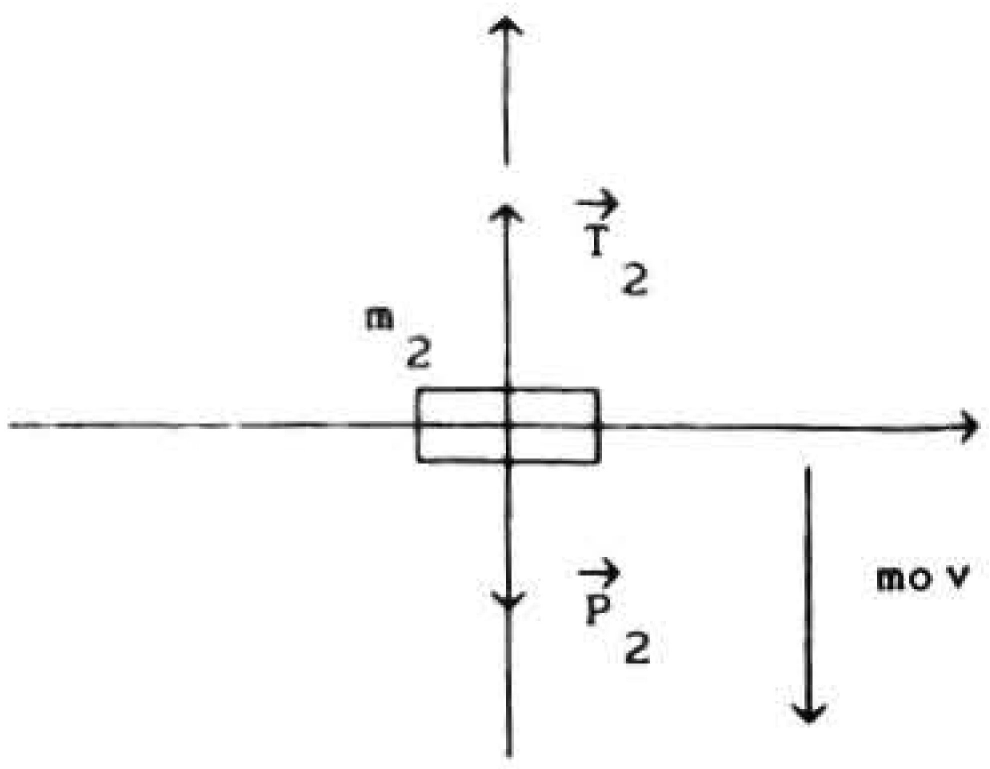
b) $\vec{T}$ = ? (en cada lado de la polea)

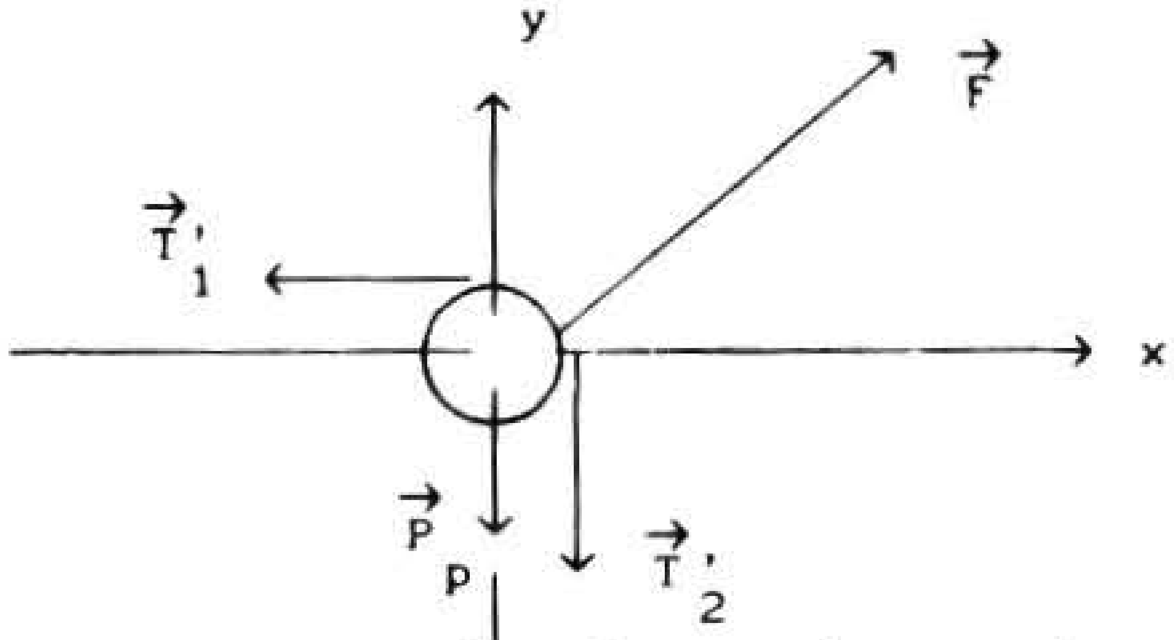
c) $E_{cin.POL}$ = ? (después de una vuelta.

SOLUCION

Como es costumbre la resolución se inicia determinando primeramente los diagramas de cuerpo libre de los cuerpos que constituyen al sistema bajo estudio.







A partir de los diagramas se plantean las siguientes ecuaciones:

$$\vec P_1 + \vec N_1 + \vec T_1 + \vec f_\mu = m_1 \vec a_1 \qquad (1)$$

$$\vec P_2 + \vec N_2 = m_2 \vec a_2 \qquad (2)$$

$$\vec T_1' + \vec T_2' + \vec P_p + \vec F = m_p \vec a_p = \vec 0 \qquad (3)$$

$$\vec \tau_F + \vec \tau_{P_p} + \vec \tau_{T_1'} + \vec \tau_{T_2'} = I \vec \alpha = \vec \tau_T^{\,o} \qquad (4)$$

Para el movimiento circular se sabe que existe la siguiente relación entre las cantidades lineales y angulares;

$$a = R\,\alpha$$

Veamos ahora, las ecuaciones algebráicas que se encuentran a partir de las ecuaciones vectoriales del sistema dado

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -m_1 g \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ N_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -f_\mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = m_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -P_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ T_2 \\ 0 \end{pmatrix} = m_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La ecuación (3) no se usará ya que no se traslada la polea de su lugar de fijación.

Pero si es de importancia saber la torca total, experimentada por la misma, respecto al punto de fijación

$$\vec{\tau}_F = \vec{0} \times \vec{F} = \vec{0}\ ,\ \vec{\tau}_{P_p} = \vec{0} \times \vec{P}_p = \vec{0}\ ,\ \vec{\tau}_{T'_1} = \vec{R}_1 \times \vec{T}_1\ ,\ \vec{\tau}_{T'_2} = \vec{R}_2 \times \vec{T}_2$$

$$\vec{\tau}_T^{\,o} = \vec{R}_1 \times \vec{T}'_1 + \vec{R}_2 \times \vec{T}'_2 = I\,\vec{\alpha}$$

$$\vec{T}'_1 = \begin{pmatrix} -T'_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{T}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -T'_2 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ \vec{R}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix}\ ,\ \vec{R}_2 = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\tau}_T^{\,o} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -T'_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -T'_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R\,(T'_1 - T'_2) \end{pmatrix}$$

$$\vec{\tau}_T^{\,o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R\,(T_1 - T_2) \end{pmatrix} = I\,\vec{\alpha}$$

Para que el sistema se mueva se debe cumplir que :

$$T_1 - T_2 \neq 0$$

De los dos casos posibles, el movimiento sólo es posible si $T_2 > T_1$ Lo cual tiene como consecuencia que la rotación sea en la dirección de las manecillas del reloj, por lo tanto

$$\vec{\alpha} = -\alpha\,\hat{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

Así el sistema de ecuaciones algebráicas que describen la dinámica del sistema queda como

$$R\,(T_1 - T_2) = -I\,\alpha$$
$$T_1 - \mu\, m_1 g = m_1 a_1$$
$$P_2 - T_2 = m_2 a_2$$
$$a_1 = R\,\alpha$$
$$a_2 = R\,\alpha$$

Dicho sistema se simplifica en lo siguiente:

$$R\,(T_2 - T_1) = 1/2\ m_p R^2 \alpha \qquad (5)$$
$$T_1 - \mu\, m_1 g = m_1\ a \qquad (6)$$
$$m_2 g - T_2 = m_2\ a \qquad (7)$$

La ecuación (5), se reduce a

$$T_2 - T_1 = 1/2\ m_p\ a \qquad (8)$$

La resolución del sistema de ecuaciones nos da las siguientes expresiones.

$$a = \frac{(m_2 - \mu\, m_1)}{(m_1 + m_2 + m_p/2)}\, g$$

$$T_1 = \frac{m_1 m_2 (1+\mu) + (1/2)\,\mu\, m_1 m_p}{m_1 + m_2 + m_p/2}\, g$$

$$T_2 = \frac{m_1 m_2 (1+\mu) + m_2 m_p}{m_1 + m_2 + m_p/2}\, g$$

$$\mathbf{a} = 6.225\ m/s^2 \qquad T_1 = 9.165\ Nt \qquad T_2 = 10.722\ Nt$$

La determinación de la energía cinética adquirida después de dar una vuelta completa a partir del reposo estará determinada por

$$E^f_{cin.} = 1/2\ I\ \omega_f^2$$

Ahora bien, de las relaciones cinemáticas, para el movimiento circular tenemos:

$$\omega_f = \omega_i + \alpha\, t$$

$$\theta = \theta_i + \omega_i\, t + 1/2\ \alpha\, t^2$$

De las condiciones iniciales del movimieto se sabe que,

$$\theta_i = 0\ ,\quad ,\ \omega_i = 0$$

y también sabemos que se cumple lo siguiente:

$$\theta_f = 2\,\pi\quad ,\ \alpha = a\ R\ ,\ \omega_f = ?$$

Sustituyendo las condiciones iniciales, en las ecuaciones anteriores éstas se reducen a lo siguiente

$$\omega_f = \alpha\ t \qquad\qquad \theta_f = (1/2)^2 \alpha\ t$$

Que simplificadas nos dan

$$\theta_f = (1/2)\ \frac{\omega_f^2}{\alpha}$$

De donde, podemos encontrar, la velocidad angular que tiene la polea, después de dar la vuelta completa.

$$\omega_f = \sqrt{2\ \alpha\ \theta} = \sqrt{2\ a/R\ \theta}$$

Finalmente, la energía cinética resulta ser

$$E_{cin} = 1/2\ I\ \omega_f^2 = 1/2(\ 1/2\ m\ R^2)\ (\ 2\ a/R\ \theta\ ) = 1/2\ m\ R\ a\ \theta$$

$$\boxed{E_{cin} = 0.489\ J}$$

• • • PROBLEMA # 20 • • •

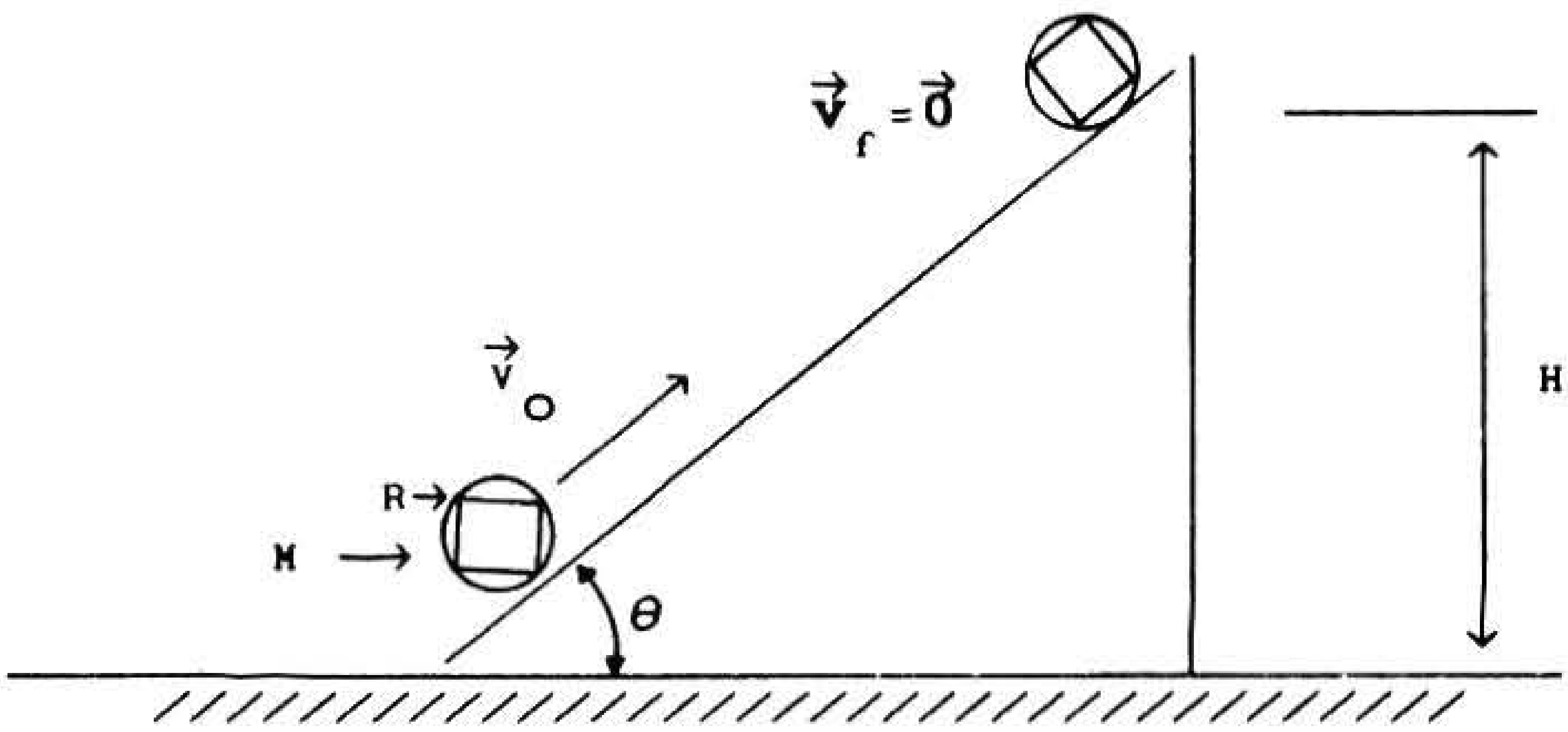
Un cuerpo homogéneo, constituido por un cilindo hueco y cuatro varillas, rueda "*sin resbalar*" subiendo por un plano inclinado de ángulo θ , como se muestra en la figura. Si en la base del plano el cuerpo tiene una velocidad de traslación v_o , *Calcular:*

a) El momento de inercia del cuerpo para un eje que pasa por su centro de masa y perpendicular al plano de la figura;

b) La máxima altura H que puede subir sobre el plano inclinado y,

c) El tiempo que tarda en regresar a la base del plano.

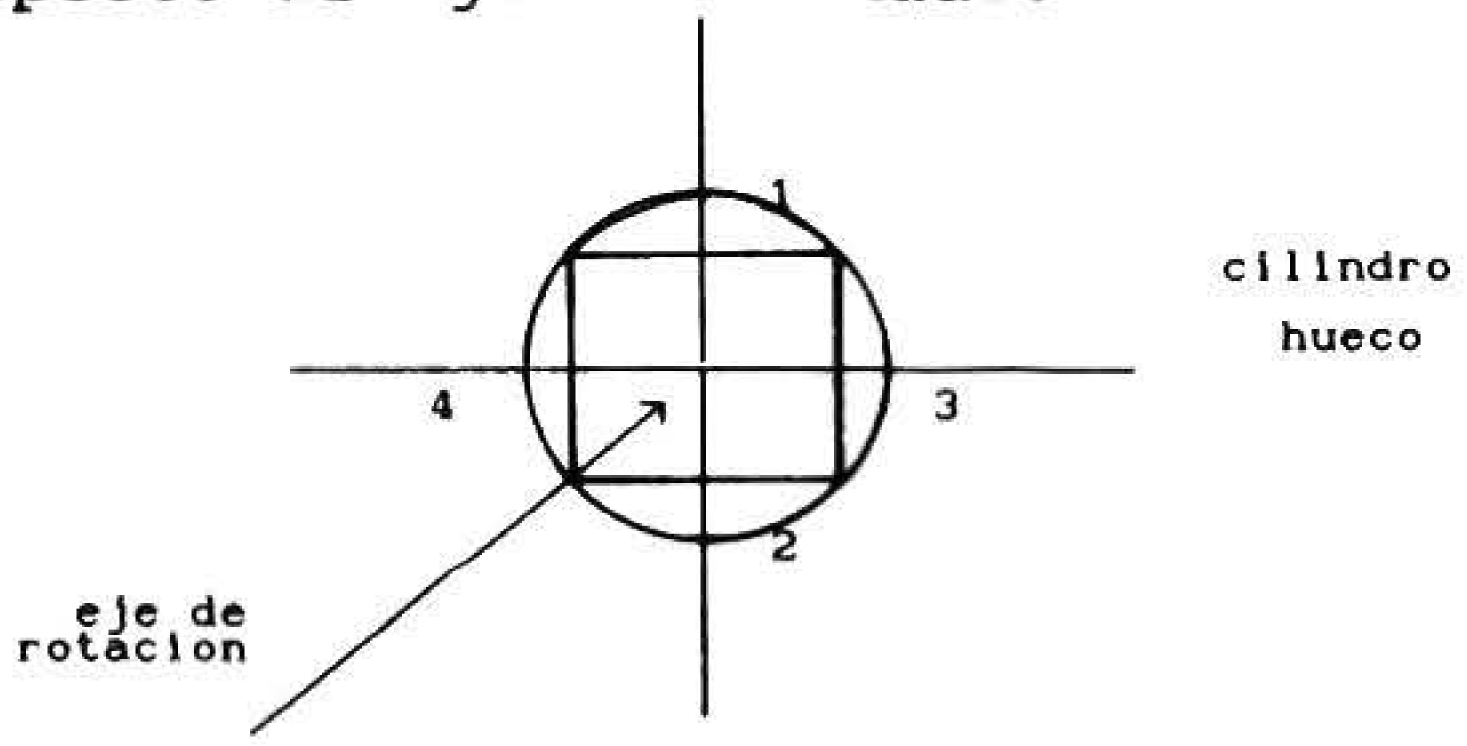
FIGURA



DATOS	INCOGNITAS
$M = 5$ kg	**a)** $I_{sistema} = ?$
$m = 1$ kg	**b)** $H_{max} = ?$
$R = 0.3$ m	**c)** $t_{regreso} = ?$
$\theta = 30°$	
$v_o = 10$ m/s	

SOLUCION

Primero hagámos un dibujo del cuerpo, para determinar su momento de inercia respecto al eje mencionado.



$$d = R \text{ sen } \phi = R \cos \phi \quad , \quad \phi = 45° \Rightarrow d = (\sqrt{2} / 2)\, R$$

$$I_o = \int r^2\, dm = \left(\int_{Cil} + \int_{Var1} + \int_{Var2} + \int_{Var3} + \int_{Var4} \right) (r^2 dm)$$

$$I_o = \int_{Cil} r^2\, dm + 4 \int_{Var} r^2\, dm$$

$$I_o = I_{CIL} + 4\, I_{VAR}$$

$$I_{CIL} = M\, R^2 \qquad\qquad I_{VAR} = m\, d^2 + \frac{1}{12}\, m\, L^2$$

$$I_o = [M\, R^2 + 4\, m\, (1/2)\, R^2 + (1/3)\, m\, (2\, R^2)\,]$$

$$I_o = [\, M + 2\, m + 2/3\, m\,]\, R^2$$

$$I_o = [\, M + 8/3\, m\,]\, R^2$$

Ahora trataremos la cuestión de cuál es la altura máxima de subida del cuerpo.

Para lo cual, partimos del principio de conservación de la energía mecánica del sistema

$$E = E_{cin.tras} + E_{cin.Rot} + E_{Pot}$$

$$E^i = 1/2\, m_s\, {v_s^i}^2 + 1/2\, I_s\, \omega_i^2 + m_s g\, R$$

$$E^f = 1/2\, m_s\, {v_s^f}^2 + 1/2\, I_s\, \omega_f^2 + m_s g\, H$$

Por la conservación de la energía $E^i = E^f$.

$$1/2(M+4m)(v_o \cos\, \theta)^2 + 1/2\, I_s (v_o\, \cos\, \theta)^2 + (M+4m)gR =$$

$$= 1/2\, m_s (\, 0\,)^2 + 1/2\, I_s\, (\, 0\,)^2 + (M+4m)gH$$

$$[\, M + 4m + M + 8/3\, m\,]\, v_o^2\, \cos^2\theta = 2\, (M+4m)g[\, H-R\,]$$

$$H-R = \frac{[\, 2M + 20/3\, m\,]}{(\, M + 4m\,)} \left(\frac{v_o^2 \cos^2\theta}{g} \right)$$

$$H = R + \frac{[\,2M + 20/3\,m\,]}{(M + 4m)} \left(\frac{v_o \cos^2\theta}{g} \right)$$

Para responder la última pregunta, la situación se presenta ahora de la siguiente manera; al llegar a su punto más alto el cuerpo se detiene o sea que la *nueva velocidad inicial* es cero . La distancia recorrida por el cuerpo está dada como

$$D = H\text{-}R \,/\, \text{sen}\ \theta$$

Pero de la cinemática, sabemos que

$$D = D_0 + v_o t + 1/2\ a\ t^2$$

La cual se trasforma, para la situación estudiada en

$$D = 1/2\ a\ t^2$$

También de la cinemática sabemos que

$$v_f = v_0 + a\ t$$

Lo cual implica que

$$a = \frac{v_f - v_o}{t}$$

Estas ecuaciones reunidas nos dan

$$\frac{H-R}{\text{sen}\ \theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{v_o \cos\ \theta}{t} \right) t^2 = \frac{v_o \cos\ \theta}{2}\ t \ .$$

Finalmente el tiempo empleado en la bajada del cuerpo es:

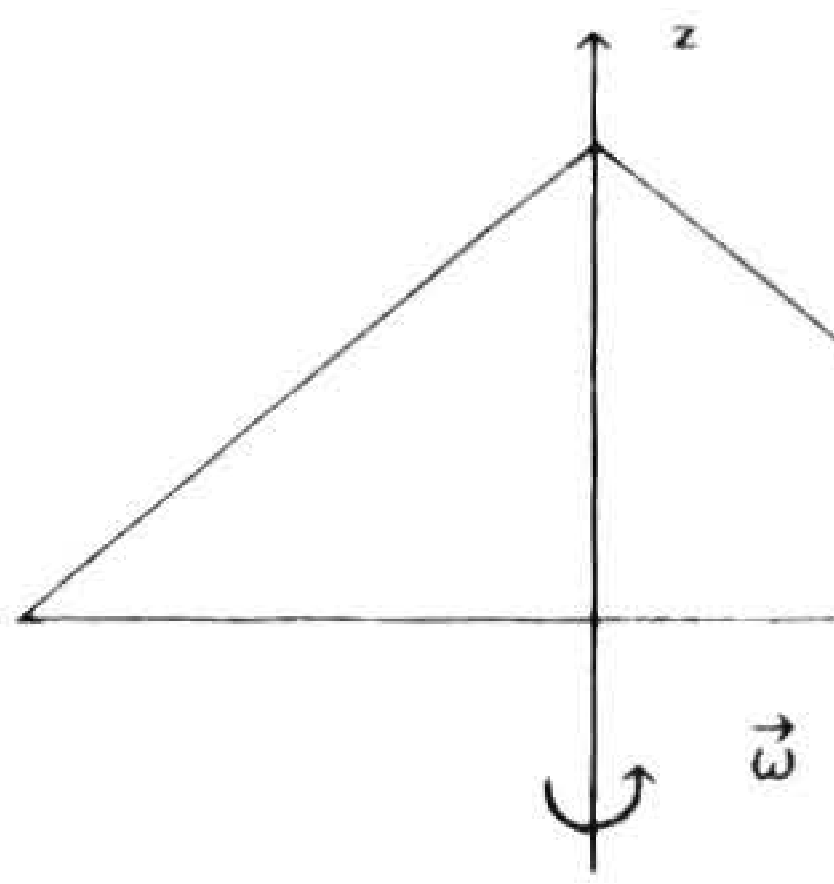
$$t = \frac{2(H-R)}{v_o \cos\theta\ \text{sen}\theta}$$

$I_s = 0.69\ \text{Kg-m}^2$. $H = 1.72$ m. $t = 0.66$ s.

. . . PROBLEMA # 21 . . .

Se tiene un recipiente hueco, el cual se rellena con agua y se hace girar con una velocidad angular $\vec{\omega}$, como se muestra en la figura. El agua se va escapando poco a poco y finalmente se vacía. Después de un tiempo t se observa que el recipiente se ha evacuado completamente. Sabiendo que el eje de rotación pasa por el eje de simetría del recipiente, como se muestra en la figura ; y despreciando la fricción con el aire, Cuál será la **torca promedio** necesaria que se le debe aplicar al sistema mientras que el agua se desaloja para lograr mantener fija la velocidad angular , o sea que ésta no cambie ?

FIGURA



DATOS	INCOGNITAS
$\omega = 90$ rad/s	$\bar{\vec{\tau}} = ?$
$t = 900$ s	
$\Delta I = 94.2$ kg-m^2	

La solución del problema, se determinará a partir del concepto de torca.
Como sabemos, la torca total externa se expresa, en términos del momento angular del sistema bajo consideración.

$$\vec{\tau}_T = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\vec{L} = I_z \vec{\omega}$$

$$\vec{\tau} = \frac{d(I_z\vec{\omega})}{dt} = \vec{\omega}\frac{d(I_z)}{dt} + I_z\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Esta es la torca instantánea para un sistema en rotación en el que

cambia su masa y su velocidad angular; para el caso en estudio se tiene que la velocidad angular no cambia, así que entonces
Para cambios finitos esto se convierte en:

$$\overline{\vec{\tau}} = \vec{\omega}\,\frac{\Delta I_z}{\Delta t} + I_z\,\frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t}$$

donde $\Delta\,\vec{\omega} = \vec{o}$. Luego entonces esta se reduce a la siguiente expresión,

$$\overline{\vec{\tau}} = \vec{\omega}\,\frac{\Delta I_z}{\Delta t}$$

o sea que la torca promedio sólo depende del cambio experimentado por el momento de inercia del sistema.

$$\overline{\vec{\tau}} = \vec{\omega}\,\frac{\Delta I_z}{\Delta t} = \left(\frac{I_z^f - I_z^i}{t}\right)\vec{\omega}$$

$$I_z^i = I_{cono} + I_{agua} \qquad \& \qquad I_z^f = I_{cono}$$

$$\Delta I_z = I_{cono} - (I_{cono} + I_{agua}) = -I_{agua}$$

$$\overline{\vec{\tau}} = -\frac{I_{agua}}{t}\,\vec{\omega} = \frac{I_{agua}}{t}\,(-\vec{\omega})$$

Dicho resultado indica que, la torca deberá ser aplicada en dirección opuesta a la dirección de rotación.
Este resultado únicamente depende del momento de inercia del cono (de agua), del tiempo transcurrido y de la velocidad angular $\vec{\omega}$ del sistema. Siendo la magnitud de la torca promedio la siguiente

$$\boxed{\|\overline{\vec{\tau}}\| = 9.42 \text{ N-m}}$$

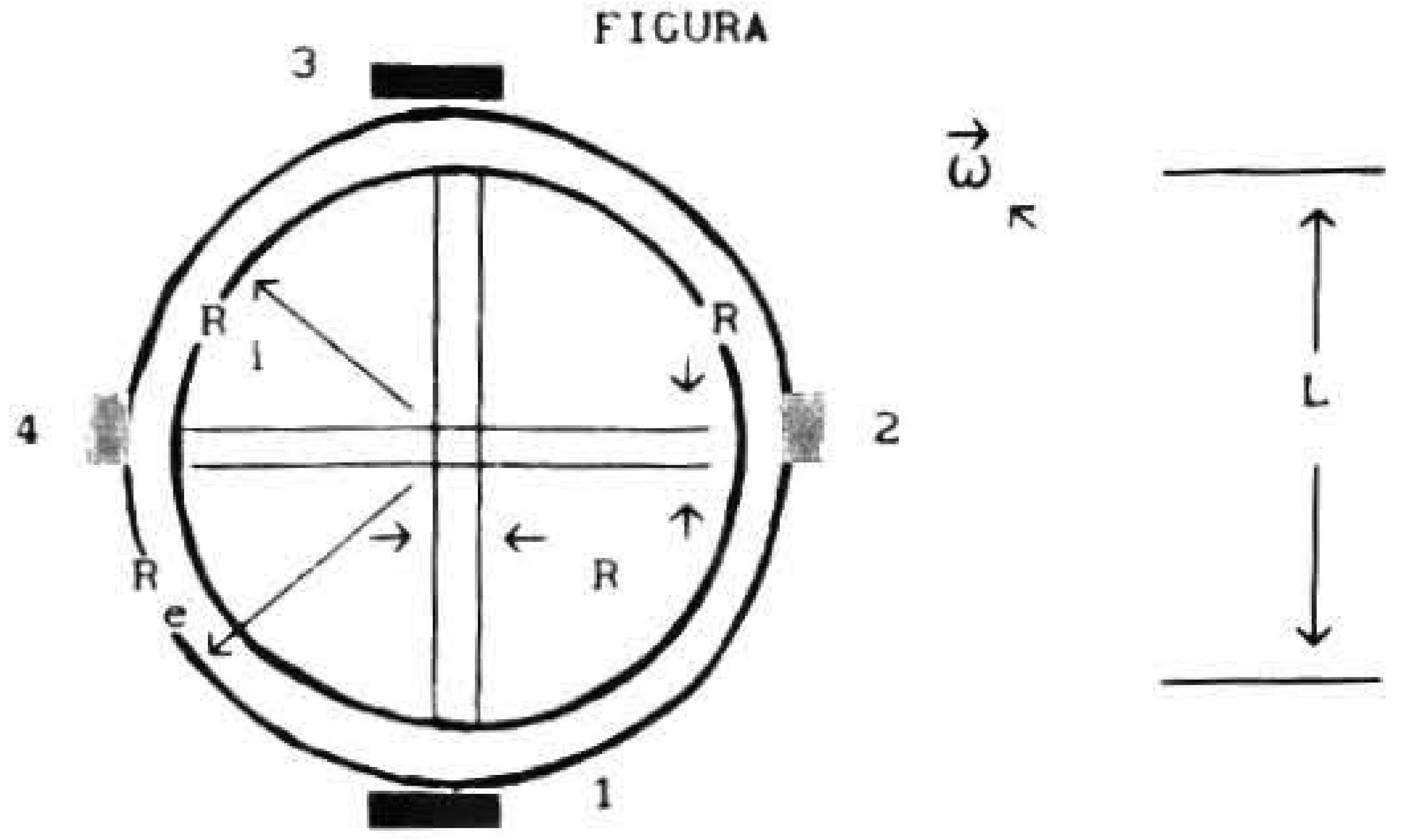
* * * PROBLEMA # 22 * * *

Se quiere construir una estación orbital, de la forma mostrada en la figura, dos ejes trasversales cilíndricos y un cuerpo anular cilíndrico, los cuales se pueden considerar como sólidos. Después de terminado el ensamblaje, se desea generar una aceleración radial igual a $\vec{g}$ sobre la pared lateral interna de la parte anular; para lo cual se, colocaron cuatro cohetes impulsores que la harán girar como se muestra en la figura . Si inicialmente la estación no gira y los tanques de los cohetes están llenos (100 Kg cada uno y la rapidéz de quemado es de 2 Kg/s (por cada uno)

a) Cuál es la torca total promedio ejercida por los cohetes si estos funcionaron durante 5 segundos,

b) Qué cambio experimentó el momento de inercia de la estación espacial?

FIGURA



DATOS

$I_{b1} = I_{b2} = 3 \times 10^3\ kg\text{-}m^2$

$I_{c.a.} = 10^4\ kg\text{-}m^2$

$R_i = 50\ m$

$R_e = 55\ m$

$R = 5\ m$

$L = 100\ m$

$\vec{\omega}(t_o) = \vec{0}$

$m_{1.cohete} = 100\ kg$

$dm/dt = -2\ k/s$

$t = 5\ seg$

$g = 9.8\ m/s^2$

INCOGNITAS

$\vec{\tau}(t=5) = ?$

$\Delta I_{sist} = ?$

SOLUCION

Como sabemos, la segunda ley de Newton describe el comportamiento de los sistemas dinámicos, para este caso será la versión en forma rotacional; la cual está expresada por:

$$\vec{\tau}(t) = \frac{d\,\vec{L}(t)}{d\,t}$$

Donde $\vec{\tau}(t)$ es la torca total aplicada al sistema y $\vec{L}(t)$ es el momento angular asociado al sistema.
Esta expresión describe el comportamiento en cada instante de tiempo en términos de como este cambiando el momento angular al transcurrir el tiempo de manera instantánea.
El proceso que se está describiendo, es un proceso entre dos estados de tiempo finitos. En el cual cambia tanto la velocidad angular de rotación como el momento de inercia del sistema.

Así que $\vec{L}(t) = I(t)\,\vec{\omega}(t)$

Luego entonces la segunda ley de Newton se expresa como

$$\vec{\tau}(t) = I(t)\,\frac{d\vec{\omega}(t)}{d\,t} + \vec{\omega}(t)\,\frac{dI(t)}{d\,t}$$

Que para el caso finito se expresa como:

$$\vec{\tau}(t) = I_s(t)\,\frac{\Delta\,\vec{\omega}}{\Delta\,t} + \vec{\omega}(t)\,\frac{\Delta\,I_s}{\Delta\,t}$$

Donde $\Delta\vec{\omega} = \vec{\omega}(t) - \vec{\omega}(t_o)$, $\Delta I_s = I_s(t) - I_s(t_o)$, $\Delta t = t - t_o$

Reduciendo esta ecuación , de acuerdo a las condiciones del problema (*condiciones iniciales*); $\vec{\omega}(t_o) = \vec{0}$, $t_o = 0$, se expresa como

$$\vec{\tau}(t) = I_s(t)\,\frac{\vec{\omega}(t)}{t} + \vec{\omega}(t)\,\frac{I_s(t)-I_s(0)}{t}$$

Que finalmente queda en la siguiente forma

$$\vec{\tau}(t) = \frac{\vec{\omega}(t)}{t}\left(2\,I_s(t) - I_s(0)\right)$$

Por la condición, de que la aceleración radial debe llegar al valor de la aceleración de la gravedad, se tiene

$$a_r = r\,\omega^2(t) = g(t) = g$$

Donde $r = R_1$, es el radio interno del cuerpo anular. Por lo tanto

$$\omega^2(t) = \frac{g(t)}{R_1} = g/R_1 \quad\Rightarrow\quad \omega(t) = \sqrt{g/R_1}$$

Por lo tanto la torca es:

$$\vec{\tau}(t) = \frac{1}{t}\sqrt{g(t)/R_1}\,\left(2\,I_s(t) - I_s(0)\right)\,\hat{z}$$

dicha ecuación depende de los valores de los momentos de inercia inicial y final del sistema , veamos cuales son estos.

$$I_s(t) = (I_{b1} + I_{b2} + I_{c.\ anular} + 4\ I_{cohetes}(t))$$

$$I_s(0) = (I_{b1} + I_{b2} + I_{c.anular} + 4\ I_{cohetes}(0))$$

La cantidad entre paréntesis resulta ser:

$$2I_s(t) - I_s(0) = 2I_{b1} + I_{c.anular} + (2\ m_{cohete}(t) - m_{cohete}(0))\ 4\ R_e^2$$

Finalmente la expresión que adquiere la torca es,

$$\vec{\tau}(t) = 1/t\ \sqrt{g/R_1}\ \left(2I_{b1} + I_{c.anul.} + 4R_e^2(2m_c(t) - m_c(0))\right)\ \hat{z}$$

Siendo su magnitud

$$\|\ \vec{\tau}\ \| = 87.13 \times 10^3\ \text{N-m}$$

Para el cambio experimentado por el momento de inercia se tiene

$$\Delta\ I = I_s(t) - I_s(0)$$

$$I_s(t) = I_{b1} + I_{b2} + I_{c.anular} + 4\ I_{cohete}(t)$$

$$I_s(0) = I_{b1} + I_{b2} + I_{c.anular} + 4\ I_{cohete}(0)$$

Pero por la simetría de los brazos $I_{b1} = I_{b2}$. Y también, como se conoce la rapidéz de la combustión en los cohetes, se puede determinar el cambio del momento de inercia asociado con ellos.

$$I_{cohete}(t) = m_{cohete}(t)\ R_e^2$$

$$I_{cohete}(0) = m_{cohete}(0)\ R_e^2$$

$$\Delta\ I_s = I_s(t) - I_s(0) = 4\ R_e^2\ (m_{cohete}(t) - m_{cohete}(0))$$

Donde la masa del cohete en el instante t esta gobernada por:

$$\frac{dm}{dt} = -\ 2 \qquad \Rightarrow \quad m\ (t) = m(0) - 2t$$

Por lo tanto el cambio en el momento de inercia es

$$\Delta\ I_s = 4\ R_e^2\ (\ m(0) - 2\ t - m(0))$$

$$\Delta\ I_s = 4\ R_e^2\ (-\ 2\ t\ ) = -\ 8\ R_e^2\ t$$

$$\Delta\ I_s = -\ 1.21 \times 10^4\ \text{kg-m}^2$$

* * * PROBLEMA # 23 * * *

En un depósito cilíndrico anular de radio interior R_i y radio exterior R_e se encuentra disuelto un material en una sustancia volátil, inicialmente este está lleno. Se observa que al final, después de evaporarse la sustancia volátil se ha depositado uniformemente el material no volátil en la pared interna del recipiente de manera que el radio interno final es R . La sustancia volátil se evaporó en un tiempo t después de iniciado el proceso. Inicialmente el sistema se encuentra girando con una velocidad angular $\vec{\omega}_i$ respecto al eje del cilindro, siendo I_i su momento de inercia. Al final de la evaporación la velocidad final es $\vec{\omega}_f$ y su momento de inercia I_f.

a) Cuál es el cambio experimentado por el momento angular si ?

$\vec{\omega}_f = 3\ \vec{\omega}_i$ $\quad$ $R_i = 9/10\ R_e$

$m_v = 10\ m_{N.v.}$ $\quad$ $R = 9/10\ R_i$

$M = 1/50\ m_v$ $\quad$ m_v = masa de la sustancia volatil

$m_{N.v}$ = masa de la sustancia no-volatil

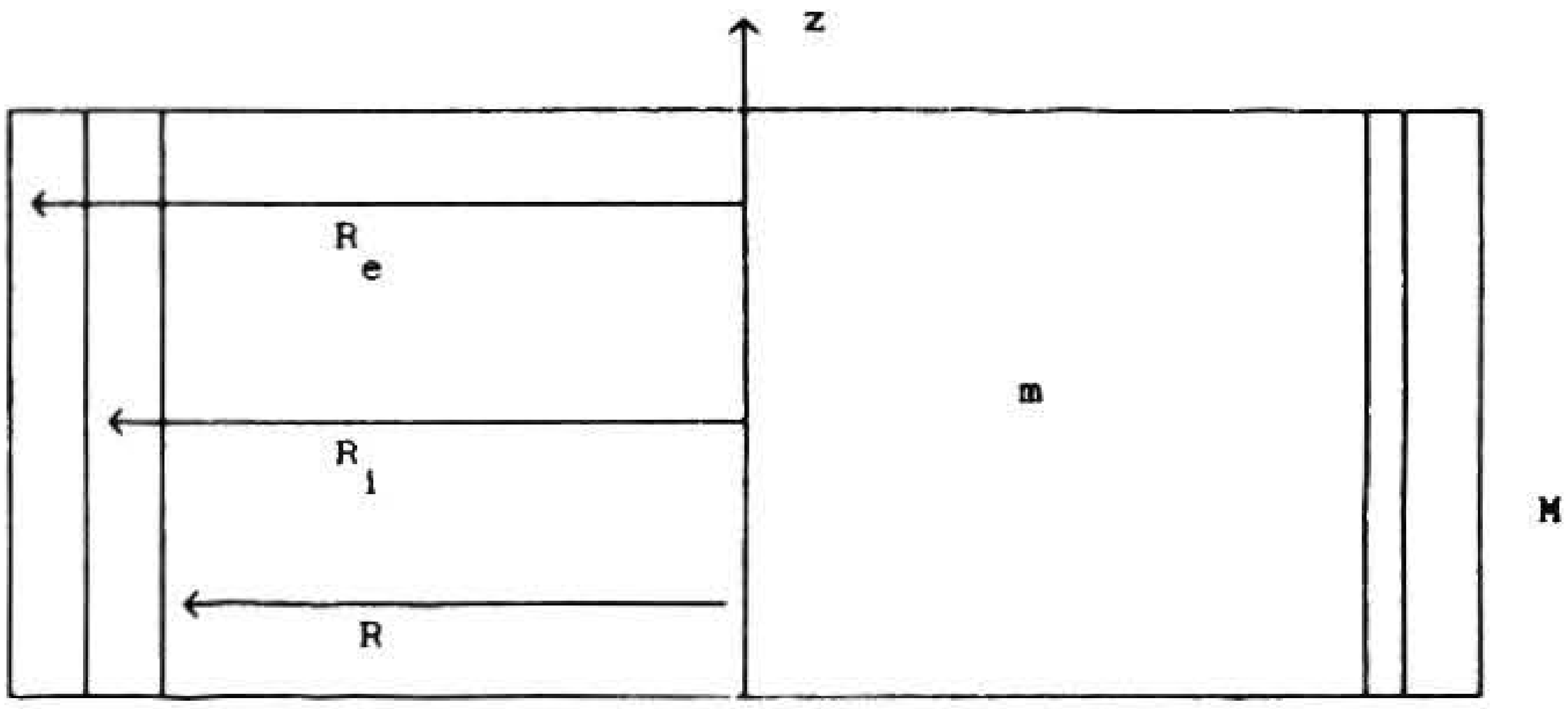
M = masa del recipiente cilindico

b) Cuál es el momento de torsión promedio experimentado por el sistema si $m_{N.v} = 10$ (u.m.) $\vec{\omega}_f = 15\ \hat{z}$ (rad/s), $R_i = 0.8$ m, $t = 60$ min.

c) Cuál es el espesor de la capa depositada?.

FIGURA

VISTA LATERAL



DATOS

$t = 60$ min

$\vec{\omega}_f = 15\ \hat{z}$ (rad/s)

$R_i = 0.8$ (mts)

$m_{N.V.} = 10$ Kg

$m_V = 10\ m_{N.V.}$

$M = 1/50\ m_V$

DATOS

$\vec{\omega}_f = 3\ \vec{\omega}_i$

$R_i = 9/10\ R_e$

$R = 9/10\ R_i$

$m = m_v + m_{N.V.}$

INCOGNITAS

$\Delta\ \vec{L} = ?$

$\overline{\vec{\tau}} = ?$

$\Delta\ R = ?$

SOLUCION

La dinámica rotacional de cuerpos rígidos establece que, para un sistema cuyo momento de inercia es I y que se mueve con velocidad angular $\vec{\omega}$, el momento angular se define como:

$$\vec{L} = I\,\vec{\omega}$$

En el caso bajo consideración el momento angular cambia al transcurrir el tiempo , es decir es función del tiempo.

Tanto el momento de inercia I como la velocidad angular $\vec{\omega}$ son funciones del tiempo, lo cual nos dice que

$$\vec{L}(t) = I(t)\,\vec{\omega}(t)$$

Supongamos que el tiempo inicial es t_1 y el final es t_f, luego entonces el momento angular inicial es

$$\vec{L}(t_1) = \vec{L}_1 = I(t_1)\,\vec{\omega}_1(t_1)$$

similarmente el momento angular final es

$$\vec{L}\,(t_f) = \vec{L}_f = I(t_f)\,\vec{\omega}_f(t_f).$$

En estas expresiones los momentos de inercia inicial y final están dados por

$$I(t_1)=I_1= I_{recip.}+ I_{sust.tot}= 1/2\ M(R_e^2+R_1^2) + 1/2\ (m_v+ m_{N.V})\ R_1^2$$

$$I(t_f)=I_f= I_{recip}+ I_{Sust.\ N.V}= 1/2\ M(R_e^2+R_1^2) + 1/2\ m_{sust.N.V}(R_1^2+R^2)$$

Luego entonces el cambio experimentado por el momento angular del sistema entre el estado inicial y final es,

$$\Delta\,\vec{L} = \vec{L}\,(t_f) - \vec{L}(t_1) = \vec{L}_f - \vec{L}_1$$

$$\Delta\,\vec{L} = (I_{recip}+ I_{sust\ N.V.})\,\vec{\omega}_f - (I_{recip}+ I_{sust.tot})\,\vec{\omega}_1$$

$$\Delta\,\vec{L} = (I_{rec.}+ I_{s\ N.V.})\ 3\,\vec{\omega}_1 - (I_{rec.}+ I_{s.T})\,\vec{\omega}_1$$

$$\Delta\,\vec{L} = 3\,\vec{\omega}_1\, I_{rec} - I_{rec}\vec{\omega}_1 + 3\, I_{s\ N.V}\,\vec{\omega}_1 - I_{s.T}\,\vec{\omega}_1$$

$$\Delta\,\vec{L} = 2\,\vec{\omega}_1 I_{rec.} + 3\,\vec{\omega}_1\, I_{s\ N.V} - \vec{\omega}_1\, I_{s.T}$$

Sustituyendo en esta expresión los momentos de inercia correspondientes se encuentra

$$\Delta\,\vec{L} = M\,\vec{\omega}_1(R_e^2 + R_1^2) + 3/2\ m_{s\ N.V}(\,R_1^2 + R^2)\vec{\omega}_1 - 1/2(\,m_v+ m_{n.v.})R_1^2\vec{\omega}_1$$

Pero también se conocen las relaciones que tienen las masas entre sí, luego entonces sustituyéndolas se tiene

$$\Delta \vec{L} = \vec{\omega}_1 \left[(1/50) m_V (R_e^2 + R_1^2) + m_{s\ N.V} R_1^2 + 3/2\ m_{s\ N.V} R^2 - 1/2 m_V R_1^2 \right]$$

$$\Delta \vec{L} = \vec{\omega}_1 \left[(1/50)\,(10 m_{s\ N.V})\,(R_e^2 + R_1^2) - 4\ m_{s\ N.V} R_1^2 + 3/2 m_{s\ N.V} R^2 \right]$$

$$\Delta \vec{L} = \vec{\omega}_1\ m_{s\ N.V} \left[1/5 (R_e^2 + R_1^2) - 4\ R_1^2 + 3/2\ R^2 \right]$$

Finalmente sustituyendo las relaciones entre los radios se encuentra la expresión para el cambio del momento angular

$$\Delta \vec{L} = m_{s\ N.V}\ \vec{\omega}_1 \left[-\ 19/20\ R_1^2 + 1/5\ R_e^2 + 3/2\ R^2 \right]$$

$$\Delta \vec{L} = m_{s\ N.V}\ \vec{\omega}_1 \left[(-19/20 + 100/405) R_1^2 + 3/2 (81/100) R_1^2 \right]$$

$$\Delta \vec{L} = m_{s\ N.V}\ R_1^2\ \vec{\omega}_1 \left[(-19/20 + 100/405) + 243/200 \right]$$

$$\Delta \vec{L} = m_{s\ N.V}\ R_1^2\ \vec{\omega}_1 \left[0.5119135802 \right]$$

La magnitud asociada con el cambio del momento angular es,

$$\Delta \vec{L} = 10 \circ (5) \circ (0.8)^2 \circ (0.512) \circ \hat{z}$$

$$\Delta \vec{L} = 16.384\ \hat{z}\ (\mathrm{kg\ m^2/s})$$

De este resultado ahora es muy fácil calcular el momento de torsión promedio al cual se sometió el sistema, de la siguiente ecuación

$$\boxed{\overline{\vec{\tau}} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} = \frac{16.384}{3600}\ \hat{z} = 4.5511 \times 10^{-3} (\mathrm{N\text{-}m})\ \hat{z}}$$

El espesor de la capa de material depositado simplemente es

$$\boxed{R_1 - R = R_1 - 9/10 R_1 = (1 - 9/10) R_1 = 0.1\ R_1}$$

• • • PROBLEMA # 24 • • •

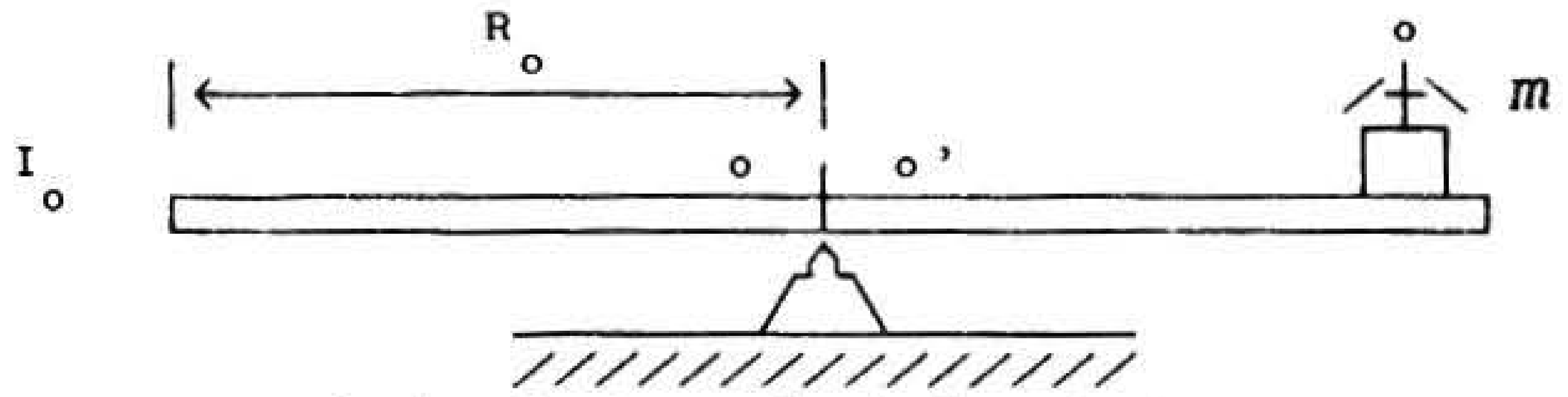
Un hombre de masa m se encuentra parado de pie al borde de una mesa giratoria horizontal redonda cuyo momento de inercia es I_o y su radio es R_o . Considérese que la mesa inicialmente se encuentra en reposo, pero va montada sobre cojinetes carentes de fricción y que tiene libertad de girar en torno a un eje vertical que pasa por su centro. Supóngase que el hombre se pone a caminar sobre el borde de la plataforma con una velocidad v_o con relación a ella.

a) Cuál es la velocidad angular con que se mueve la plataforma,

b) Cuál es la velocidad V del hombre con relación al suelo

c) Cuál es el desplazamiento angular girado por la mesa giratoria cuando el hombre regresa a su posición inicial con relación al suelo.

FIGURA



vista lateral del sistema

DATOS	INCOGNITAS
m	$\omega_f = ?$
I_o	$v_r = ?$
R_o	$\theta = ?$
v_o	

SOLUCION

Debido a que los cojinetes de suspensión no ejercen fricción sobre la mesa giratoria , no existen torcas externas sobre el sistema. Así que , la dinámica rotacional establece lo siguiente

$$\vec{\tau}^{\,o}_{ext} = \vec{0}$$

Lo cual, implica que se cumple el principio de conservación del momento angular total del sistema, o sea

$$\vec{L}^{o}(t) = \textbf{VECTOR CONSTANTE} , \qquad \forall \ t$$

Esta ley de conservación establece entonces que para dos instantes de tiempo cualesquiera , el vector de momento angular es el mismo. Lo cual nos lleva a la siguiente igualdad,

$$\vec{L}^{o}(t_{i}) = \vec{L}^{o}(t_{f})$$

Donde $\vec{L}^{o}(t_{i}) = \vec{L}_{i}^{o}$, es el momento angular en el estado inicial y $\vec{L}^{o}(t_{f}) = \vec{L}_{f}^{o}$ es el momento angular en el estado final del sistema.
Una cosa importante que se debe mencionar es que la validéz de estas relaciones sólo es cierta si las observaciones se realizan respecto a un sistema inercial de referencia, en nuestro caso el sistema se representa con " o ", que está fijo sobre el pivote de la suspensión del sistema.
Luego entonces, el momento angular del sistema inicial está dado por

$$\vec{L}_{i}^{o} = \vec{L}_{iH}^{o} + \vec{L}_{iP}^{o} = \vec{r}_{iH} \times \vec{P}_{iH} + I_{P}^{o}\,\vec{\omega}_{iP}$$

Y de manera similar el momento angular final es

$$\vec{L}_{f}^{o} = \vec{L}_{fH}^{o} + \vec{L}_{fP}^{o} = \vec{r}_{fH} \times \vec{P}_{fH} + I_{P}^{o}\,\vec{\omega}_{fP}$$

Pero de acuerdo con las condiciones iniciales del sistema se tiene

$$\vec{v}_{iH} = \vec{v}_{o}\ ,\ \vec{\omega}_{iP} = \vec{0}\ ,\ \vec{r}_{iH} = \vec{R}_{o}\ ,\ \vec{P}_{iH} = m\,\vec{v}_{i} = m\,\vec{v}_{o}$$

$$\vec{r}_{iH} \times \vec{P}_{iH} + I_{p}^{o}\,\vec{\omega}_{iP} = \vec{r}_{fH} \times \vec{P}_{fH} + I_{p}^{o}\,\vec{\omega}_{fP}$$

$$m\,\vec{R}_{o} \times \vec{v}_{o} = m\,\vec{R}_{f} \times \vec{v}_{f} + I_{p}^{o}\,\vec{\omega}_{fP} \qquad \vec{R}_{f} = \vec{R}_{o}$$

donde

$$\vec{P}_{f} = m\,\vec{v}_{fH} = m\,\omega_{f} R_{f}\,\hat{z}$$

La cual se transforma en

$$m\,R_{o} v_{o}\,\hat{z} = m\,R_{o} v_{f}\,\hat{z} + I_{p}\,\omega_{f}\,\hat{z}$$

$$m\,R_{o} v_{o}\,\hat{z} = (m\,R_{o}^{2}\omega_{f} + I_{p}\,\omega_{f})\,\hat{z}$$

$$m\,R_{o} v_{o} = (\,I_{p} + m\,R_{o}^{2}\,)\,\omega_{f}\,\hat{z}$$

$$\omega_{f} = \frac{m\,R_{o}\,v_{o}}{I_{p} + m\,R_{o}^{2}}$$

La velocidad relativa al suelo se determina suponiéndo, en el

análisis, dos sistemas de referencia uno fijo y el otro en rotación uniforme respecto al sistema inercial.
El observador inercial observa que el sistema en rotación (la plataforma) gira con velocidad angular $\vec{\omega}_f$. Pero el observador fijo en la plataforma, observa que el piso gira con una velocidad angular $-\vec{\omega}_f$. Respecto a ambos sistemas, el vector de posición es el mismo , debido a que coinciden sus orígenes de aplicación.
Lo que cambia en el sistema giratorio son tanto sus coordenadas como sus vectores de orientación unitaria, siendo los cambios de estos

$$\frac{d\,\hat{x}'_j}{d\,t} = \vec{\omega} \times (\hat{x}'_j)$$

Por lo cual, la velocidad observada desde el sistema inercial (suelo), está formada de dos términos

$$\vec{v} = \frac{d\,\vec{r}}{d\,t} = \hat{x}'_j \frac{d\,x'_j}{d\,t} + x'_j \frac{d\,\hat{x}'_j}{d\,t} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$\vec{v}$ = velocidad observada desde el sistema inercial

$\vec{v}'$= velocidad observada respecto al sistema no-inercial

$\vec{\omega} \times \vec{r}$ = Término no inercial generado por la rotación.

Así que, finalmente la velocidad del hombre con relación al suelo está dada como

$$\vec{V}_{r.suelo} = \vec{V}_f{}' + \vec{\omega}_f \times \vec{R}_f$$

Pero la velocidad

$$\vec{V}_f{}' = R_f\omega_f\,(\hat{u}) \quad \text{y} \quad \vec{\omega}_f \times \vec{R}_f = \omega_f R_f(-\hat{u}),$$

por lo tanto la velocidad relativa al suelo es nula.
El desplazamiento angular realizado por la plataforma giratoria al regresar el hombre a su posición original con relación al suelo es

$$\boxed{\theta = -2\pi}$$

• • • PROBLEMA # 25 • • •

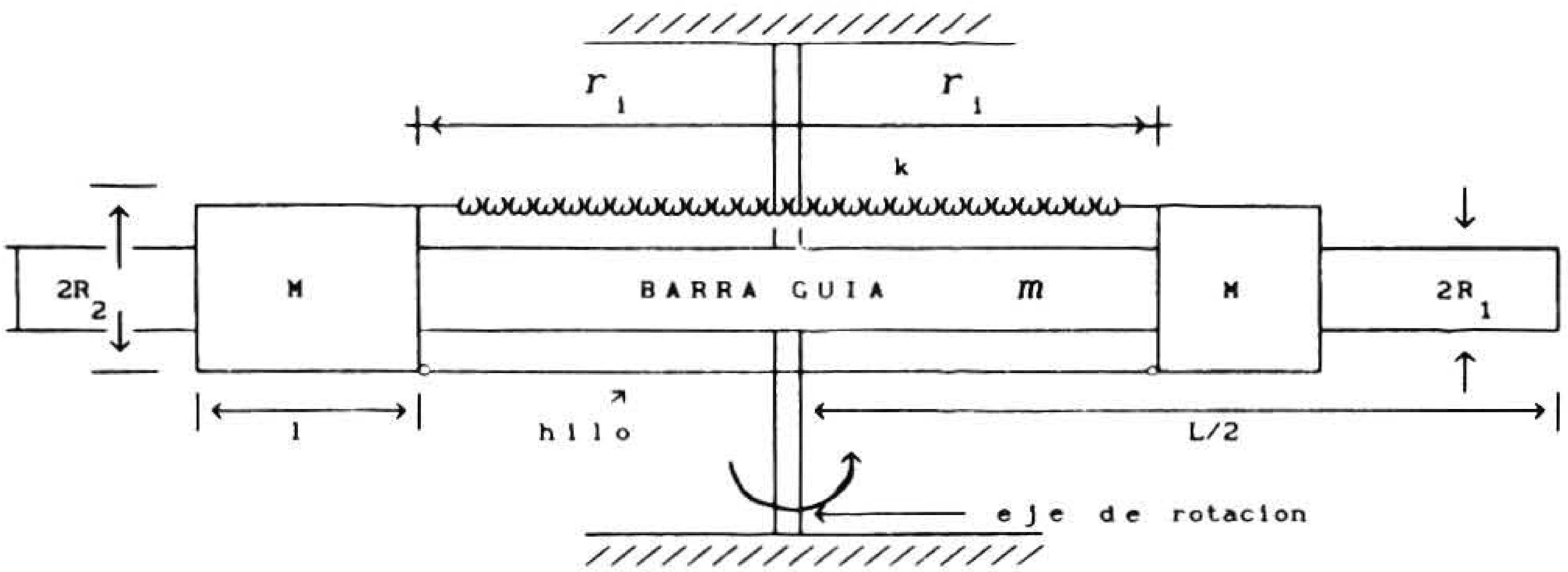
Un regulador centrifugo esta constituido por dos pequeños cilindros huecos, los cuales van montados sobre una guía cilíndica, los cuales deslizan sobre ella sin fricción. La guía es una varilla cilíndica de masa *m*. Inicialmente la guía gira con una velocidad angular $\vec{\omega}_o$ alrededor de un eje vertical, perpendicular a la varilla, posteriormente se le acolpan los cilindros. La posición adquirida, por cada uno de los pequeños cilindros, después del acoplamiento, respecto al eje de rotación, es r_1. Ambos cilindros están ligados por un resorte de masa despreciable, el cual se deforma como resultado del acoplamiento, así mismo éstos se mantienen inicialmente fijos mediante un hilo de masa despreciable cuya longitud es $2\,r_1$. Repentinamente se corta el hilo, de manera que, el regulador experimenta una disminución de su velocidad angular, a un valor dado $\vec{\omega}_f$. Cuando el resorte llega a su máxima deformación . Calcule:

a) El momento de inercia del regulador antes y después del acoplamiento,

b) La velocidad angular adquirida inmediatamente después del acoplamiento $\vec{\omega}_1$.

c) La velocidad angular al alcanzar el resorte su máxima deformación , $\vec{\omega}_f$.

d) El valor de la constante elástica k , sabiendo que la longitud sin deformar del resorte es $2\,r_o$.



DATOS	INCOGNITAS
$M = 0.5$ kg	ω_1
$\omega_o = \pi$ rad/s	ω_f
$r_o = 1$ m.	k
$\omega_f = 2/3\pi$ rad/s	I_o
$\Delta r = 1/3\ r_o$	I_f
$l = 0.10$ m	

SOLUCION

Primeramente , veremos las condiciones en las cuales se desarrolla el movimiento de este sistema.

Una hipótesis fundamental, para la solución del mismo, es considerar que en los puntos de sujeción del eje de rotación, no se genera ningún momento de torsión. Lo cual tendrá como consecuencia que la suma de torcas externas sobre el sistema sea nula *(el resorte no produce torca sobre los cilindros móviles).*

$$\vec{\tau}_T = \vec{0}$$

Esto implica, en consecuencia, la conservación del momento angular del sistema o sea

$$\vec{L}\ (t) = \text{constante} \qquad \forall \quad t.$$

Veamos la primera cuestión , la guía es una barra cilíndrica de longitud L y radio R_1 , la rotación se realiza en torno a un eje que pasa por el centro de masa de la guía , pero es perpendicular al eje del cilindro.

Por el teorema de los ejes perpendiculares

$$I_z = I_y + I_x \ ,$$

se tiene

$$I_z = 2\ I_x = 2\ I_y$$

debido a que $I_x = I_y$.

Donde I_z es el momento de inercia de la guía respecto a un eje que pasa por su centro de masa y que coincide con el eje del cilindro. Pero la situación es que la rotación del regulador es en un eje perpendicular; luego entonces por el teorema de los ejes perpendiculares

$$I_x = 1/2\ I_z = 1/2\ [\ 1/2\ m\ r_c^2\ ] = 1/4\ m\ R_1^2$$

Esta es sólo una parte del momento de inercia, la otra parte contribuyente es la de los cilindros huecos.

Por lo tanto el momento de inercia antes del acoplamiento tiene el valor

$$I_o = 1/4\ m\ R_1^2 + 1/2\ M\ [\ (L-l)^2 + (R_1^2 + R_2^2)]$$

Después del acoplamiento, influyen los cilindros anulares, de la siguiente manera

$$I_1 = 1/4\ m\ R_1^2 + I_{C.A1} + I_{C.A2}$$

Donde $I_{C.A1} = I_{C.A2}$ debido a que son cuerpos idénticos situados simétricamente respecto al eje de rotación.
Su valor se determina por el teorema de los ejes paralelos el cual establece:

$$I_{C.A1} = I_{C.A1}^{c.m.} + M\ r^2$$

El valor del momento de inercia, respecto al centro de masa, para un eje diametral está dado por

$$I_{C.A1}^{c.m} = 1/4\ M\ (\ R_1^2 + R_2^2\ )$$

Así resulta que, el momento de inercia después del acoplamiento es

$$I_1 = 1/4\ m\ R_1^2 + 2\ [\ M\ (\ r_1 + l/2)^2 + 1/4\ M\ (R_1^2 + R_2^2)]$$

Dicha expresión es el momento de inercia; después del acoplamiento de los cilindros anulares con la barra guía.
Veamos ahora cual es la velocidad angular adquirida por el sistema después del acoplamiento, para lo cual aplicaremos el principio de conservación del momento angular del sistema. El cual establece:

$$\vec{L}_{antes} = \vec{L}_{después}$$

$$\vec{L}_{antes} = I_o\ \vec{\omega}_o\ ,\quad \vec{L}_{después} = I_1 \vec{\omega}_1$$

$$I_o \vec{\omega}_o = I_1 \vec{\omega}_1$$

De donde se puede determinar la velocidad adquirida después del acoplamiento, estando dada por

$$\vec{\omega}_1 = (I_o / I_1) \vec{\omega}_o$$

$$\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_o \left(\frac{1/4\ m\ R_1^2 + 1/2\ M\ [\ (L-l)^2 + R_1^2 + R_2^2\ ]}{1/4\ m\ R_1^2 + 2\ M\ [(r_1 + l/2)^2 + 1/4(\ R_1^2 + R_2^2)]} \right)$$

Similarmente aplicando la conservación del momento angular a la situación en que el resorte esta deformado al máximo , se cumple

$$\vec{L}^{\,max.def.} = \vec{L}^{\,acoplamiento}$$

$$I_m \vec{\omega}_m = I_a \vec{\omega}_a$$

En esta expresión se cambio I_1 por I_a, que es el valor ya determinado anteriormente. Lo que si experimenta cambio es el momento I_m ya que cambia la posición de los cilindros respecto al eje de rotación.

Este momento de inercia está dado por

$$I_m = \left(1/4\ m\ R_1^2 + 2M\ [\ (r_f + 1/2)^2 + (R_1^2 + R_2^2)\,] \right)$$

donde $r_f = r_1 + \Delta r$, es la posición final y Δr es la deformación experimentada por el resorte. Así entonces la velocidad angular adquirida por el regulador en su estado final es

$$\vec{\omega}_m = \vec{\omega}_a \left(\frac{1/4\ m\ R_1^2 + 2M\ [(r_1 + 1/2)^2 + 1/4\ (R_1^2 + R_2^2)]}{1/4\ m\ R_1^2 + 2M\ [(r_1 + 1/2 + \Delta r)^2 + 1/4 (R_1^2 + R_2^2)]} \right)$$

para la determinación de la constante elástica tenemos que igualar la fuerza de orígen elástico con la fuerza centrípeta, lo cual nos lleva a la ecuación

$$F_c = F_k$$

Donde

$$F_k = -\,k\ (2 \circ \Delta\ r) \qquad \text{y} \qquad F_c = -\,M\ \omega_f^2\ (r_f + 1/2)$$

Así que la constante elástica queda como

$$k = \frac{M\ \omega_f^2 (\ r_o + \Delta r + 1/2)}{2\ \Delta\ r}$$

Pero,

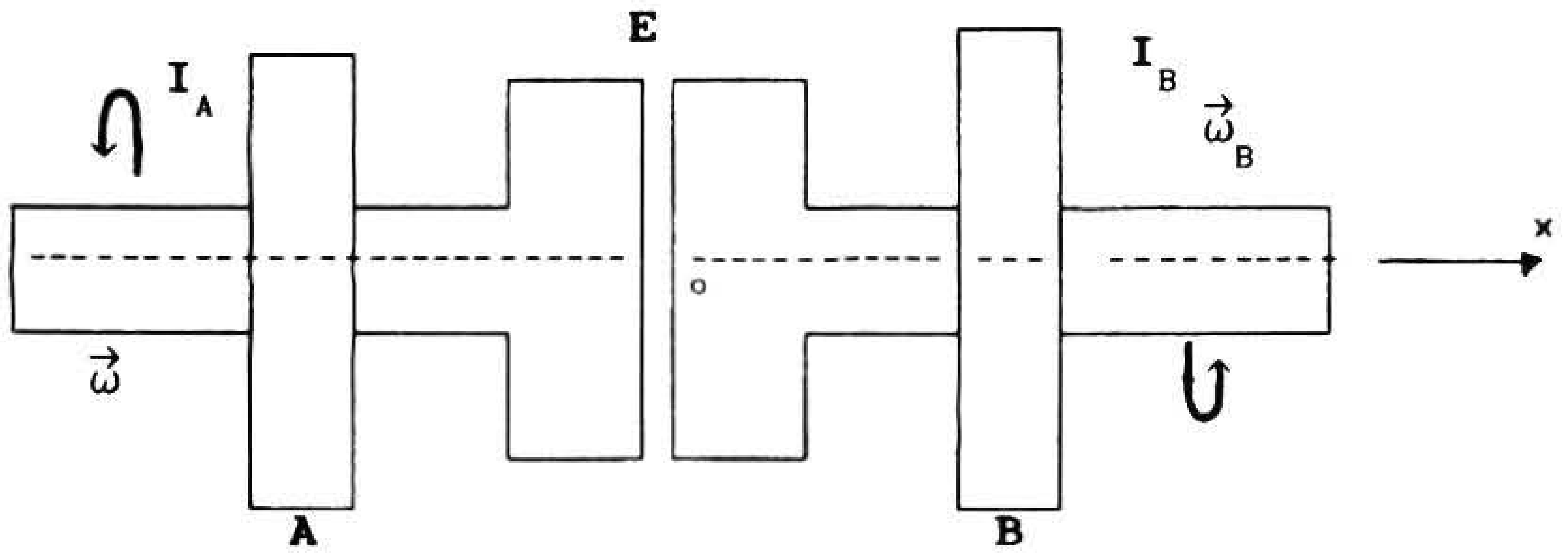
$$\Delta r = 1/3\ r_o$$

luego entonces se tiene

$$\boxed{k = \frac{M\ \omega_f^2\ (4/3\ r_o + 1/2)}{2/3\ r_o}}$$

• • • PROBLEMA # 26 • • •

Se tienen dos cuerpos simétricamente colocados respecto a un punto O. Estos están formados por cilindros homogéneos como se muestra en la figura . Si se mira el cuerpo del lado izquierdo se observa que gira con una velocidad angular $\vec{\omega}_A$ en dirección de las manecillas del reloj y el cuerpo de la derecha gira con velocidad $\vec{\omega}_B$ en dirección contraria a la manecillas del reloj. El momento de inercia del cuerpo en e lado izquierdo con respecto al eje de rotación es I_A y el cuerpo del lado derecho tiene un momento de inercia I_B. Cuando se unen ambos cuerpos por medio de un mecanismo de embrague **E** , Cuál es la velocidad angular resultante adquirida por el sistema después del acoplamiento ?.



DATOS

$\omega_A = 15$ rad/s

$\omega_B = 25$ rad/s

$I_A = 80$ k-m^2

$I_B = 60$ k-m^2

INCOGNITAS

$\vec{\omega}_s = ?$

Durante el tiempo que dura el embrague , la unidad **A** ejerce una torca sobre la unidad **B** y por la tercera ley de Newton , **B** ejerce una torca idéntica pero de dirección opuesta. Por ser generadas internamente estas torcas, se tiene que la torca total externa es cero.

$$\vec{\tau}_T = \vec{0}$$

$$\vec{\tau}_T = \frac{d}{dt}\,[\vec{L}(t)] = \vec{o}$$

Lo cual tiene como consecuencia que se conserve el momento angular del sistema.

$$\vec{L}(t) = \textbf{CONSTANTE} \qquad \forall \quad t$$

Expresarémos el momento angular; antes del embrague, como después del acoplamiento, entre las unidades.

$$\vec{L}^{\,i} = I_A\vec{\omega}_A + I_B\vec{\omega}_B$$

$$\vec{\omega}_A = \begin{pmatrix} \omega_A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\omega}_B = \begin{pmatrix} -\,\omega_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

antes del embrague

$$\vec{L}^{\,i} = \begin{pmatrix} I_A\omega_A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\,I_B\omega_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_A\omega_A - I_B\omega_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\,300 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

después del embrague

$$\vec{L}^{\,f} = (\,I_A + I_B)\,\vec{\omega} = \begin{pmatrix} (I_A + I_B)\,\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Igualando el momento angular inicial y el momento angular final encontramos

$$\vec{L}^{i} = \begin{pmatrix} I_A\omega_A - I_B\omega_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (I_A + I_B)\,\omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{L}^{f}$$

Igualando las correspondientes componentes

$$\omega = \frac{I_A\omega_A - I_B\omega_B}{I_A + I_B} = 4/7\ \omega_A - 3/7\ \omega_B = -\ 15/7\ \text{rad/s}$$

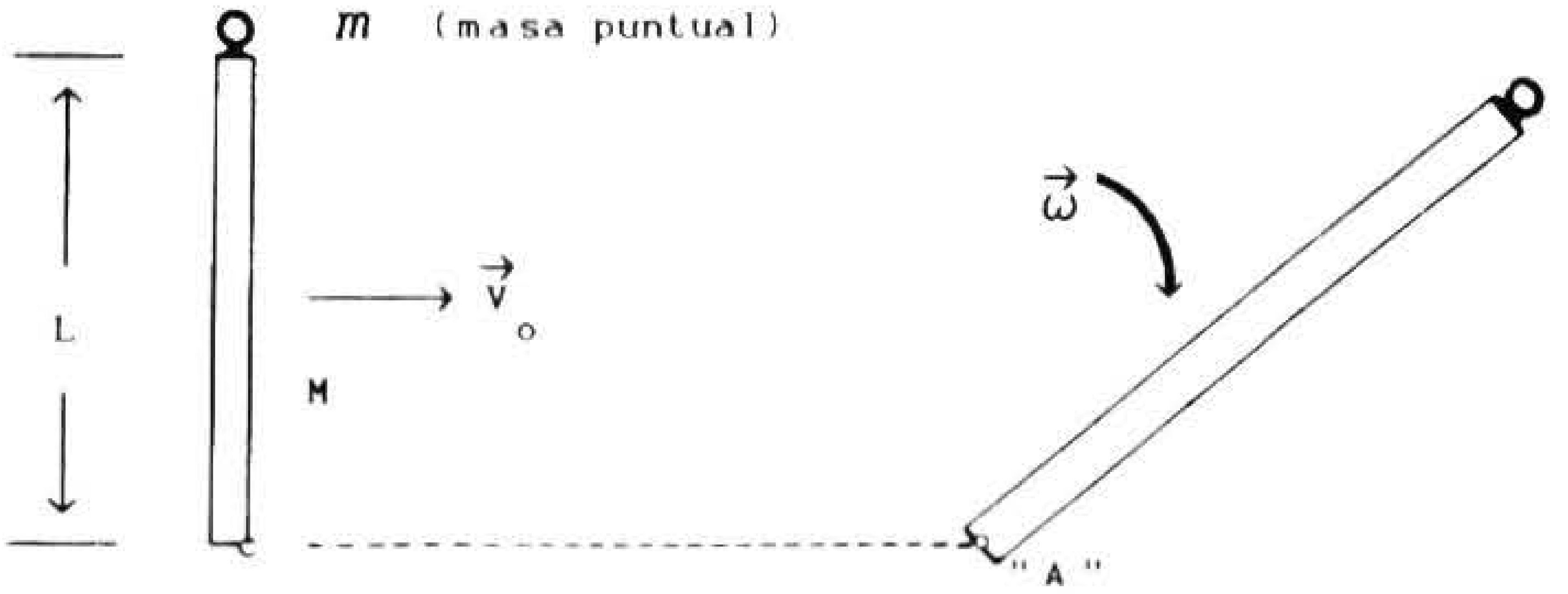
El signo menos en este resultado, debe interpretarse como que el sistema después del acoplamiento gira en dirección contraria a las manecillas del reloj.

• • • PROBLEMA # 27 • • •

El cuerpo rígido mostrado en la figura se mueve sobre una mesa horizontal lisa, con una velocidad inicial $\vec{v}_o$ pero sin girar. Posteriormente uno de sus extremos se acopla en un punto fijo (clavo) " **A** ". *DETERMINAR:*

a) La velocidad angular de la varilla después de acoplarse.

b) El cambio de la energía cinética del cuerpo rígido.



DATOS

$M = 2$ k.

$L = 1$ m.

$m = 0.5$ k.

$v_o = 3$ m/s.

INCOGNITAS

$\omega_v = ?$

$\Delta E_{cin} = ?$

SOLUCION

Debido a que el punto de fijacion ejerce una fuerza cuyo brazo de palanca es cero , la torca total externa sobre el sistema es nula

$$\vec{\tau}_A = \vec{o}$$

Lo cual sabemos que tiene como consecuencia , la conservación del momento angular total respecto al punto **A**.

$$\vec{L}_A(t) = \textbf{CONSTANTE} \quad \forall \quad t$$

$$\vec{L}_A^{\,i} = \vec{L}_A^{\,f}$$

El momento angular inicial está formado de dos términos, el momento angular de la partícula puntual y el de la varilla rígida

$$\vec{L}_A^{\,i} = \vec{L}^{\,i}_{A,P} + \vec{L}^{\,i}_{A,Var} = \vec{r}_p \times \vec{P}_p + \vec{r}_{c.m\ Var} \times \vec{P}_{c.m\ Var}$$

$$\vec{L}_A^{\,i} = \begin{pmatrix} 0 \\ L \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} m\,V_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ L/2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} M\,V_o \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\,V_o L(m+M/2) \end{pmatrix}$$

$$\vec{L}_A^{\,f} = \vec{L}_{A,P}^{\,f} + \vec{L}_{A,Var}^{\,f} = I_{A,p}\,\vec{\omega} + I_{A,Var}\,\vec{\omega}$$

$$\vec{L}_A^{\,f} = (I_{A,p} + I_{A,Var})\,\vec{\omega} = [m\,L^2 + 1/12\,M\,L^2 + M\,(L/2)^2]\vec{\omega}$$

$$\vec{L}_A^{\,f} = (m + M/3)\,L^2\,\vec{\omega}\,.$$

Igualando los momentos angulares inicial y final se encuentra

$$(m + M/3)L^2\,\vec{\omega} = -\,V_o\,L\,(m + M/2)\,\hat{z}$$

$$\vec{\omega} = -\frac{V_o(m + M/2)}{L(m + M/3)}\,\hat{z} = 27/7\,(-\hat{z})$$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\,3.86 \end{pmatrix} \text{rad/s}$$

$$\Delta E_{cin} = E_{cin}^{f} - E_{cin}^{i}$$

$$E_{cin}^{i} = E_{S,i}^{tras.} + E_{s,i}^{rot} = 1/2\,M_s\,v_{c.m.i}^2 + 1/2\,I_s^A\,\omega_i^2$$

$$E_{cin}^{f} = E_{s,f}^{tras} + E_{s,f}^{rot} = 1/2\,M_s\,V_{c.m.f}^2 + 1/2\,I_s^A\,\omega_f^2$$

Haciendo uso de las condiciones iniciales del problema en estas ecuaciones encontramos

$$v_{c.m,i} = v_o\,,\quad \omega_o = 0\,,\quad \omega_f = \omega\,,\quad M_s = m + M\,,\quad I_s = I_{var} + I_{Part}$$

$$E_{cin}^{i} = 1/2\,(m + M)\,v_o^2$$

$$E_{cin}^{f} = 1/2\,(m + M)(\omega\,L/2)^2 + 1/2\,(I_{part}^A + I_{varill}^A)\,\omega^2$$

Así entonces el cambio en la energía cinética es

$$\Delta E = 1/2\left((mL^2 + 1/12\,ML^2 + 1/4\,M\,L^2 + 1/4(m + M)L^2)\,\omega^2 - (m + M)v_o^2\right)$$

$$\Delta E = 1/2\left((5/4m + 7/12\,M)\,L^2\omega^2 - (m + M)\,v_o^2\right)$$

$$\Delta E = 1/2 \left((5/4\ m + 7/12\ M) L^2 \left(\frac{V_o\ (m + M/2)}{L\ (m + M/3)} \right)^2 - (m + M)\ v_o^2 \right)$$

$$\Delta E = 1/2 \left(\frac{(5/4\ m + 7/12\ M)\ (m + M/2)}{(m + M/3)}\ v_o^2 - (m + M)\ v_o^2 \right)$$

$$\Delta\ E = 1/2\ v_o^2 \left(\frac{(5/4\ m + 7/12\ M)\ (m + M/2) - (m+M)(m+M/3)}{(m + M/3)} \right)$$

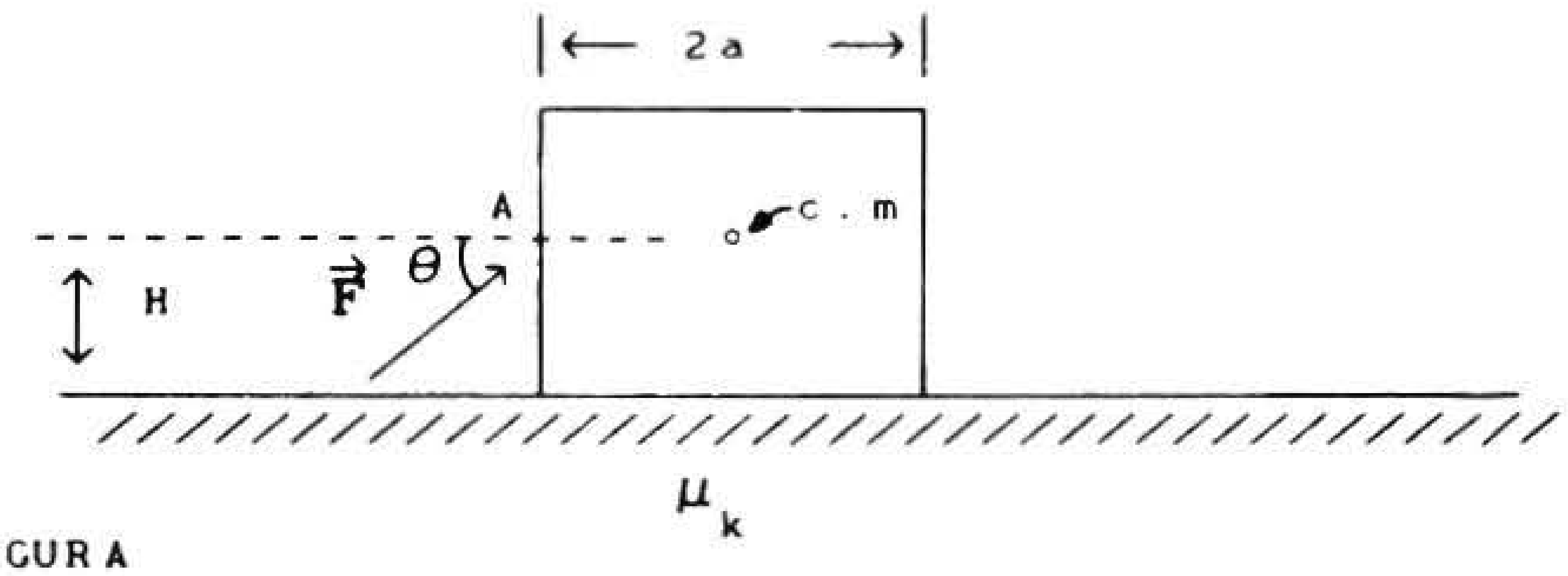
$$\boxed{\Delta\ E = 32.86\ \text{J.}}$$

• • • PROBLEMA # 28 • • •

Sobre un bloque de masa M se aplica una fuerza $\vec{F}$, ejercida sobre el punto "A", como se indica en la figura. Si el coeficiente de fricción cinético entre el bloque y el piso es μ_k , determine:

a) El valor máximo de $\vec{F}$ de tal manera que no se vuelque el bloque.

b) La aceleración adquirida por el bloque



FIGURA

DATOS	INCOGNITAS
M = 50 k.	$\vec{F}_{max}$ = ?
H = 1 m.	$\vec{a}_{bloque}$ = ?
a = 1 m.	
θ = 20°	

SOLUCION

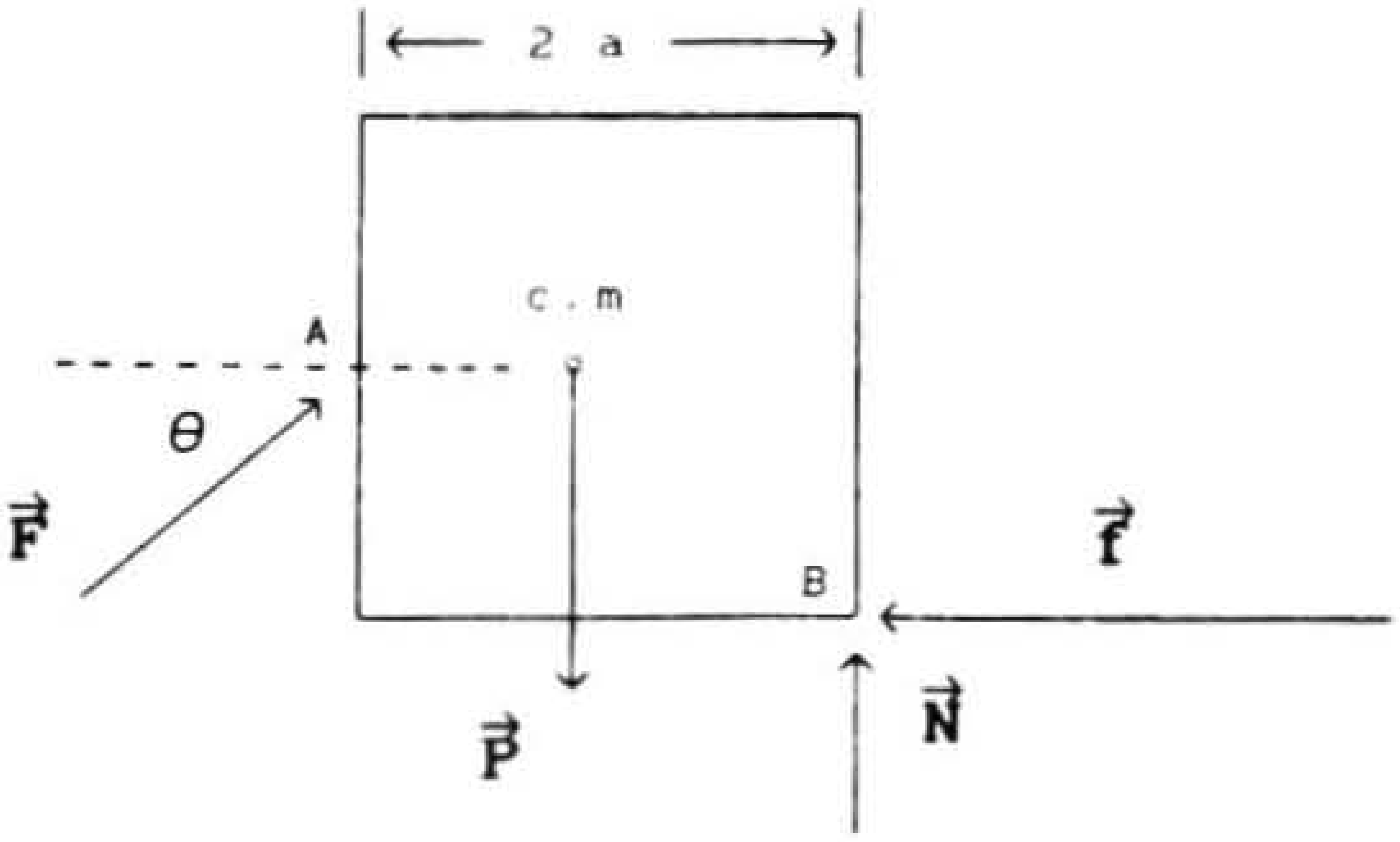
La fuerza $\vec{F}$ adquirirá su máximo valor cuando la fuerza normal únicamente se este aplicando en el punto B, de tal manera que la aceleración angular deberá ser nula.

Las ecuaciones dinámicas, para describir el problema, son:

$$\vec{\tau}_{sist} = I\,\vec{\alpha}$$

$$\vec{F}_{sist} = M\,\vec{a}_{c.m}$$

Construyamos, el diagrama de cuerpo libre del bloque



$$\vec{F}_s = \vec{F} + \vec{f} + \vec{P} + \vec{N} = M\,\vec{a}_{c.m}$$

$$\vec{\tau}_s = \vec{\tau}_F + \vec{\tau}_f + \vec{\tau}_p + \vec{\tau}_N = I\,\vec{\alpha}$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F\cos\theta \\ F\,sen\,\theta \\ 0 \end{pmatrix},\quad \vec{f} = \begin{pmatrix} -f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -p \\ 0 \end{pmatrix},\quad \vec{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ N \\ 0 \end{pmatrix},\quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_{c.m} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} M\,a_{c.m} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F\cos\theta - f \\ F\,sen\,\theta - p - N \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F\cos\theta - f = M\,a_{c.m}$$

$$F\,sen\,\theta - P + N = 0$$

Esta es toda la información contenida en la dinámica traslacional. Ahora veremos, cual es la información, que puede proporcionar la dinámica rotacional. Elegimos como punto de referencia para determinar los momentos producidos por las fuerzas el centro de masa del bloque.

$$\vec{\tau}_F = \vec{r}_F \times \vec{F} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F\cos\theta \\ F\,sen\,\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a\,F\,sen\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{\tau}_f = \vec{r}_f \times \vec{f} = \begin{pmatrix} a \\ -H \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -f\,H \end{pmatrix}$$

$$\vec{\tau}_P = \vec{\mathbf{r}}_P \times \vec{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\tau}_N = \vec{\mathbf{r}}_N \times \vec{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} a \\ -H \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ N \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Na \end{pmatrix}$$

Reemplazando estos resultados, en la segunda ley en su forma rotacional, encontramos

$$\vec{\tau}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -aF\,sen\theta - fH + Na \end{pmatrix} = I\,\vec{\alpha} = \vec{0}$$

Luego, entonces, las ecuaciones que describen esta situación son:

$$M\,a_{c.m} = F\cos\theta - f \qquad (1)$$
$$0 = F\,sen\,\theta - P + N \qquad (2)$$
$$0 = a\,N - a\,F\,sen\,\theta - f\,H \qquad (3)$$
$$f = \mu_k\,N \qquad (4)$$

Despejando la normal de la ecuación (2) y reemplazándola en (4)

$$f = \mu_k\,(P - F\,sen\,\theta) \qquad (5)$$

Sustituyendo ahora ésta, en las ecuaciones (1) y (3), encontramos

$$F\cos\theta - \mu_k(P - F\,sen\,\theta) = M\,a_{c.m}$$
$$P\,(a - \mu_k H) + F\,(\mu_k sen\,\theta\,H - 2\,a\,sen\,\theta) = 0$$

De este sistema de ecuaciones, inmediatamente se pueden determinar la aceleración y la fuerza pedidas en el problema.

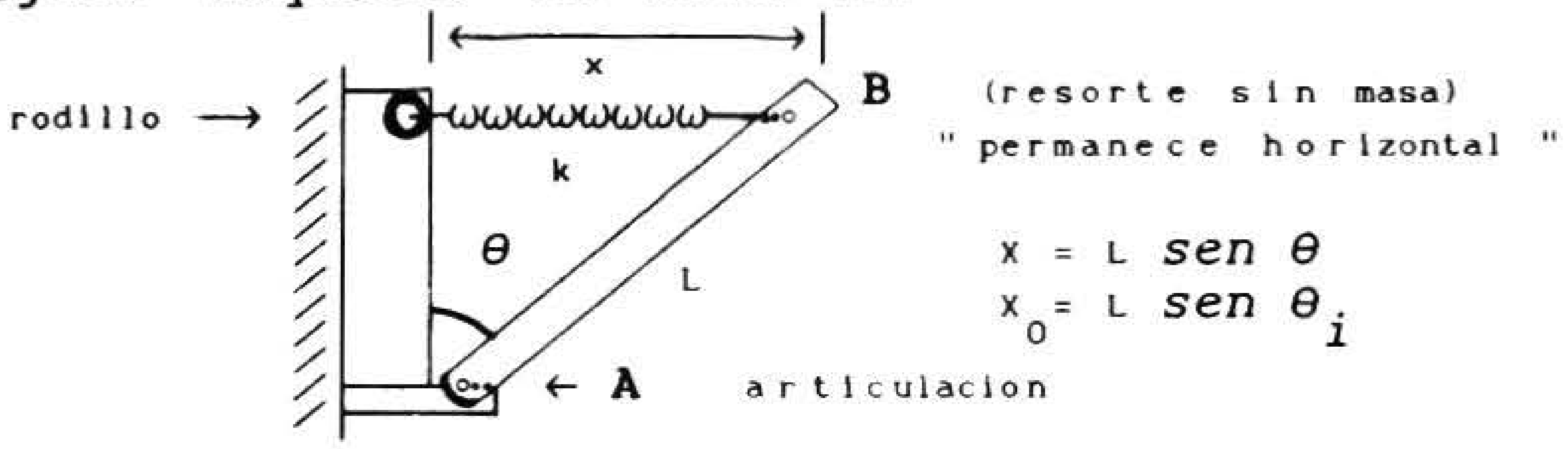
$$F = \frac{(\mu_k H - a)\ M g}{(\mu_k H - 2a)\ sen\ \theta} = \frac{(\mu_k - 1)}{(\mu_k - 2)} \quad (167.5)$$

$$a_{c.m} = \left(\frac{(\mu_k H - a)(cos\theta + \mu_k sen\theta)}{(\mu_k H\ sen\theta - 2a\ sen\theta)} - \mu_k \right) g$$

$$a_{c.m.} = \left[\frac{(\mu_k - 1)}{(\mu_k - 2)} \left(\frac{cos\theta + \mu_k sen\theta}{sen\ \theta} \right) - \mu_k \right] g$$

• • • PROBLEMA # 29 • • •

Una barra uniforme de masa M , se encuentra articulada en el punto **"A"**. Esta se libera desde el reposo, cuando el resorte tiene su longitud natural (en el ángulo θ_i). Determinar la velocidad angular de la barra en el instante en que el ángulo adquiere el valor θ_f.



$x = L\ sen\ \theta$

$x_0 = L\ sen\ \theta_i$

DATOS

$\theta_i = 30°$ $\quad M = 12\ k$

$\theta_f = 60°$ $\quad v_0 = 0$

$L = 2\ m.$ $\quad \omega_0 = 0$

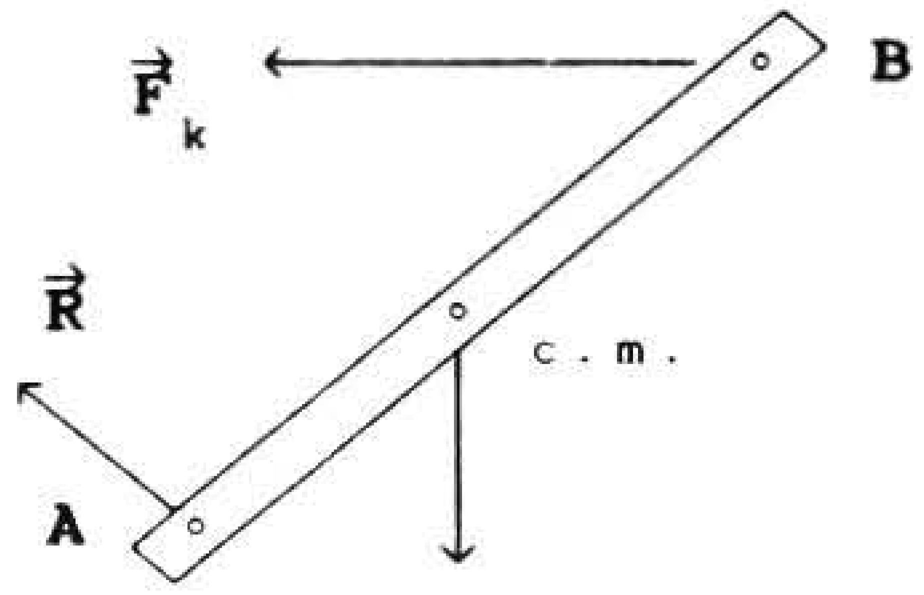
$k = 80\ N/m.$

INCOGNITAS

$\omega_f = ?$

SOLUCION

Primeramente, construiremos el diagrama de cuerpo libre asociado con la varilla y, seleccionaremos como punto de referencia para la determinación de los momentos producidos por las fuerzas, el punto de la articulación **A**.



Estableciendo la segunda ley de Newton , en forma rotacional

$$\vec{\tau}^{A}_{s} = I\ \vec{\alpha}$$

La ley de la elasticidad de Hooke , establece que:

$$\vec{F} = -k\ \Delta\ \vec{X}$$

La torca total a la cual está sometida la varilla es generada por las siguientes fuerzas, el peso de la varilla y la fuerza ejercida por el resorte, la reacción en la articulación **no** produce torca.

$$\vec{\tau}_R = \vec{r}_A \times \vec{R} = \vec{o}\ , \quad \vec{\tau}_F = \vec{r}_B \times \vec{F}_k \quad , \quad \vec{\tau}_p = \vec{r}_p \times \vec{P}$$

$$\vec{\tau}_F = \begin{pmatrix} L\ sen\ \theta \\ L\ cos\ \theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -F_k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_k\ L\ sen\ \theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{\tau}_p = \begin{pmatrix} L/2\ sen\theta \\ L/2\ cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/2\ L\ P\ sen\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{\tau}^{\mathbf{A}}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_k L sen\theta - 1/2\ LP sen\theta \end{pmatrix} = I\ \vec{\alpha} = I\ \frac{d\ \vec{\omega}}{d\ t}$$

Esta ecuación vectorial, nos da una sola ecuación algebráica para la solución de la pregunta formulada.

$$F_k\ L\ sen\ \theta - (1/2)\ L\ P\ sen\ \theta = -\ (1/3)\ M\ L^2\ \omega\ \frac{d\ \omega}{d\ \theta}$$

$$-\ k(\ X - X_o)\ sen\theta - Mg\ sen\theta\ /2 = -\ 1/3\ M\ L\ \omega\ \frac{d\ \omega}{d\ \theta}$$

$$\omega\ d\omega = \frac{3}{M\ L}[k(L\ sen\theta\ sen\theta - L\ sen\theta\ sen\theta_i) + (1/2)Mg\ sen\theta]d\theta$$

$$\int_{\omega_i}^{\omega_f} \omega\ d\omega = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \frac{3}{M\ L}[k(L\ sen\theta^{\ 2} - L\ sen\theta\ sen\ \theta_i) + (1/2)Mg\ sen\theta\ ]d\theta$$

$$\frac{\omega^2}{2}\Bigg|_{\omega_i}^{\omega_f} = \frac{3k}{M}\left(\int_{\theta_i}^{\theta_f} sen\theta^2 d\theta\ -\ sen\theta_i \int_{\theta_i}^{\theta_f} sen\theta\ d\theta\right) + \frac{3g}{2L}\int_{\theta_i}^{\theta_f} sen\theta\ d\theta$$

$$1/2(\omega_f^2 - \omega_i^2) = \frac{3k}{M}\left([\tfrac{1}{2}\theta - \tfrac{1}{4}\ sen\ 2\theta]\Big|_{\theta_i}^{\theta_f} - sen\theta_i[-\ cos\theta\ ]\Big|_{\theta_i}^{\theta_f}\right)$$

$$+ \frac{3g}{L}\left(-\ (\ cos\theta_f - cos\theta_i)\right)$$

$$\omega_f^2 = \frac{3k}{M}\left([\tfrac{1}{4}(\ sen2\theta_i - sen2\theta_f)] + \tfrac{1}{2}\ (\ \theta_f - \theta_i\ ) - sen\theta_i cos\theta_i\ +\right.$$

$$\left. +\ sen\ \theta_i cos\theta_f \right) + \frac{3g}{L}\left(cos\ \theta_i - cos\ \theta_f\right)$$

$$\omega_f = \left(\frac{3k}{4M}(sen2\theta_i - sen2\theta_f) + \frac{3k}{2M}\ (\theta_f - \theta_i) - \frac{3k}{M}\ sen\theta_i cos\theta_i\ +\right.$$

$$+ \frac{3k}{M} \operatorname{sen}\theta_i \cos\theta_f + \frac{3g}{L} (\cos\theta_i - \cos\theta_f) \Bigg)^{1/2}$$

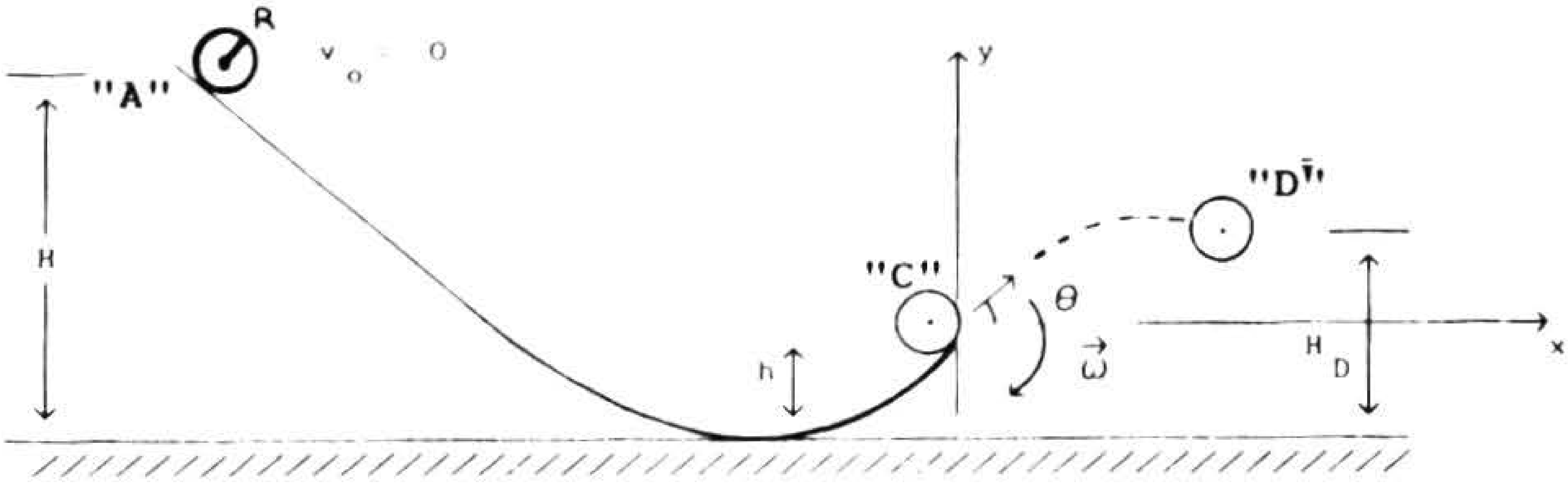
$$\boxed{\omega_f = 2.63 \text{ rad/s.}}$$

• • • PROBLEMA # 30 • • •

Un cuerpo de masa m se suelta del reposo en el punto "**A**" y rueda sin resbalar sobre la pista mostrada. *DETERMINE:*

a). La velocidad angular del cuerpo en el punto "**C**" .

b). La máxima altura a la cual sube el cuerpo (punto "**D**").



DATOS

$M = 1$ k $h = 1$ m.

$R = 0.1$ m. $\theta = 20^\circ$

$H = 2$ m.

INCOGNITAS

$\omega_C = ?$

$H_D = ?$

SOLUCION

Inicialmente el cuerpo , por estar localizado a una altura H y en reposo, únicamente posee energía potencial respecto a la superficie de la tierra. Pero debido a que, durante su movimiento no, actúan fuerzas de orígen disipativo se cumple el teorema de conservación de la energía mecánica, es decir,

$$E = \text{constante.}$$

$$E_T = E_{Pot.} + E_{cin.tras.} + E_{cin.Rot}$$

Aplicando este principio de conservación entre los puntos "**A**" y " **C** " encontramos

$$E^A = MgH_A + 1/2\ M\ v_{c.m.A}^2 + 1/2\ I\ \omega_A^2$$

$$E^C = MgH_c + 1/2\ M\ v_{c.m.C}^2 + 1/2\ I\ \omega_B^2$$

Pero de acuerdo con las condiciones iniciales del problema, sabemos que la velocidad de traslación y rotación son cero en "**A**". Por lo tanto

$$E^A = M\ g(H-R)$$

$$E^C = Mg(h-R) + 1/2\ M\ v_{c.m.C}^2 + 1/2\ I\ \omega_C^2$$

Además como en el rodamiento puro, la velocidad de traslación del centro de masa y la velocidad de rotación del cuerpo, están relacionadas mediante la expresión

$$v_{c.m.} = R\ \omega$$

y el cuerpo se supone que es una esfera rígida, tiene un momento de inercia conocido igual a

$$I_{c.m.} = 2/5\ M\ R^2$$

dan como resultado que la energía en el punto "C" es

$$E^C = Mg(h-R) + 1/2\ M\ (R^2\ \omega_C^2) + 1/2\ (2/5\ M\ R^2)\ \omega_C^2$$

igualando las energías en "**A**" y "C" tenemos

$$M\ g\ (H-R) = M\ g\ (h-R) + 7/10\ M\ R^2\ \omega_C^2$$

$$M\ g\ (H-h) = 7/10\ M\ R^2\ \omega_C^2 = 7/10\ M\ v_c^2$$

$$\boxed{\omega_C = 1/R\sqrt{\frac{10}{7}\ g\ (H-h)} \qquad v_C = \sqrt{\frac{10}{7}\ g\ (H-h)}}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}_o t + 1/2\ \vec{g}\ t^2$$

$$\begin{pmatrix} X \\ h_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_c \cos\theta \\ v_c \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} t + 1/2 \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t^2$$

$$\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_c \cos\theta \\ v_c \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t$$

$$X = v_c \cos\theta\ t$$
$$h = h + v_c \operatorname{sen}\theta\ t - 1/2\ g\ t^2$$
$$v = v_c \cos\theta$$
$$0 = v_c \operatorname{sen}\theta - g\ t \qquad \therefore \qquad t = \frac{v_c \operatorname{sen}\theta}{g}$$

$$h_D = h + \frac{v_c^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2\ g}$$

$$\boxed{h_D = h + 5/7\ (H - h)\ \mathrm{sen}^2\theta}$$

$$\boxed{h_{max} = 1.0835\ \mathrm{m.} \qquad\qquad \omega_C = 37.44\ \mathrm{rad/s.}}$$

• • • PROBLEMA # 31 • • •

En la figura mostrada se representa un péndulo físico constituido por un aro de masa $m/2$ y una varilla delgada de masa $m/2$, el cual se encuentra sujetado en el punto fijo " o " . El sistema se libera en un instante de tiempo dado y se mueve realizando un movimiento de tipo periódico, en torno al punto de sujeción.

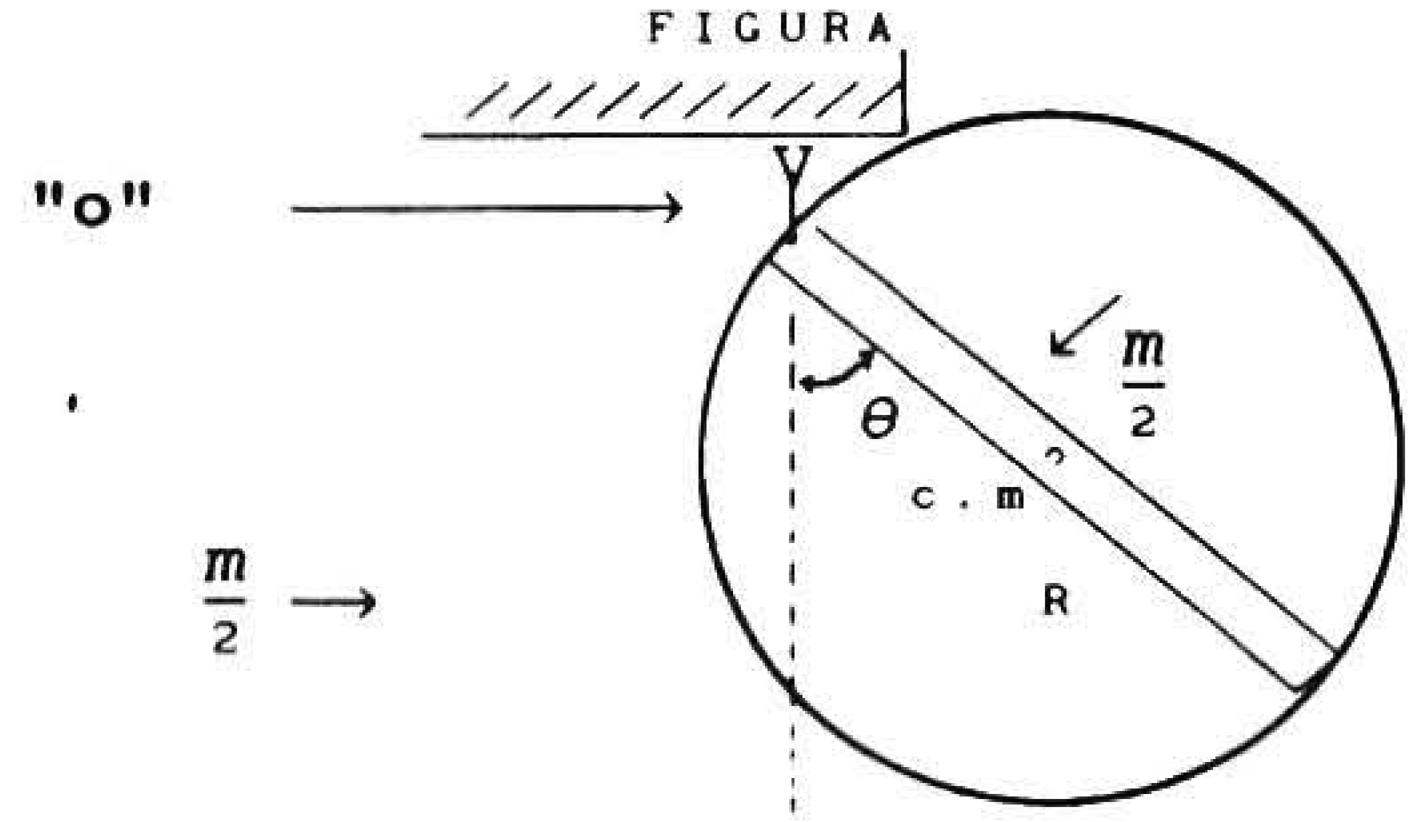
Encuentre las siguientes cantidades asociadas con este sistema:

a).- Establezca la ecuación que describe el movimiento del centro de masa del sistema en la aproximación de oscilaciones pequeñas,

b).- Calcular el tiempo que se tardan en realizar **10** oscilaciones,

c).- Calcular la longitud del péndulo simple equivalente.

FIGURA



DATOS	INCOGNITAS
m = 3.5 Kg	$\theta = \theta(t)$
R = 0.4 m	t_n = ?
n = 10 oscilaciones	L_s = ?

SOLUCION

El sistema formado por el aro y la varilla es tal que su centro de masa se encuentra localizado en su centro geométrico, lo cual facilita los calculos a realizar.

Primero tendremos que determinar la torca total, ejercida por la fuerza gravitacional, que actúa sobre el centro de masa del sistema **aro - varilla** . Como sabemos, la segunda ley de Newton en las cantidades angulares se expresa de la siguiente forma:

$$\vec{\tau}^{\,o} = I_s \vec{\alpha}$$

Donde

$\vec{\tau}^{\circ}$ = Torca producida por el peso del sistema respecto al punto **O**

I_s = Momento de inercia, respecto al punto de suspensión.

$\vec{\alpha}$ = Aceleración angular del movimiento rotacional.

$$\vec{\tau}^{\circ} = \vec{r}_{c.m} \times \vec{F} = -R\,m\,g\,\text{sen}\,\theta\;\hat{k}$$

$$I_s = I_{ARO} + I_{varilla} = 2\left(\frac{m}{2}\right)R^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{m}{2}\right)(2R)^2$$

$$I_s = \frac{5}{3}\,m\,R^2$$

$$\vec{\alpha} = \frac{d^2\vec{\theta}}{dt^2}$$

Sustituyendo en la segunda ley de Newton esta información, tenemos:

$$-\,m\,R\,g\,\text{sen}\,\theta\;\hat{k} = \left(\frac{5}{3}\,m\,R^2\right)\frac{d^2\vec{\theta}}{dt^2}$$

Simplificando la ecuación anterior, se encuentra

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3}{5}\,(g/R)\,\text{sen}\,\theta = 0$$

que es la ecuación de movimiento (*exacta*) del sistema estudiado. La cual adquiere una forma más sencilla y fácil de resolver bajo la condición de que las oscilaciones sean pequeñas , mediante ésta hipótesis se cumple que sen $\theta \approx \theta$. Asi la ecuación se reduce a:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3}{5}\,(g/R)\,\theta = 0$$

$$\omega^2 \equiv \frac{3}{5}\,(g/R)$$

$$\theta (t) = \theta (t_o) \, sen \, (\omega t + \delta)$$

Ahora se puede calcular el tiempo, empleado por el sistema, para realizar las 10 oscilaciones pendulares. Como sabemos, del concepto de período, el tiempo empleado para efectuarse una oscilación está dado por:

$$T = \frac{2 \pi}{\omega} = 2 \pi \sqrt{(5 / 3) (R / g)}$$

Luego entonces el tiempo requerido para las 10 oscilaciones es

$$t = 10 \, T = 20 \pi \sqrt{(5 / 3) (R / g)} = 16.39 \text{ s.}$$

Finalmente, para encontrar la longitud de un péndulo simple equivalente , igualamos ambas expresiones del período de oscilación , la del péndulo compuesto y la del péndulo simple.

$$T_{simple} = 2 \pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad , \quad T_{compuesto} = 2 \pi \sqrt{(5/3) (R/g)}$$

$$T_{simple} = T_{compuesto}$$

$$2 \pi \sqrt{\frac{L}{g}} = 2 \pi \sqrt{(5/3) (R/g)}$$

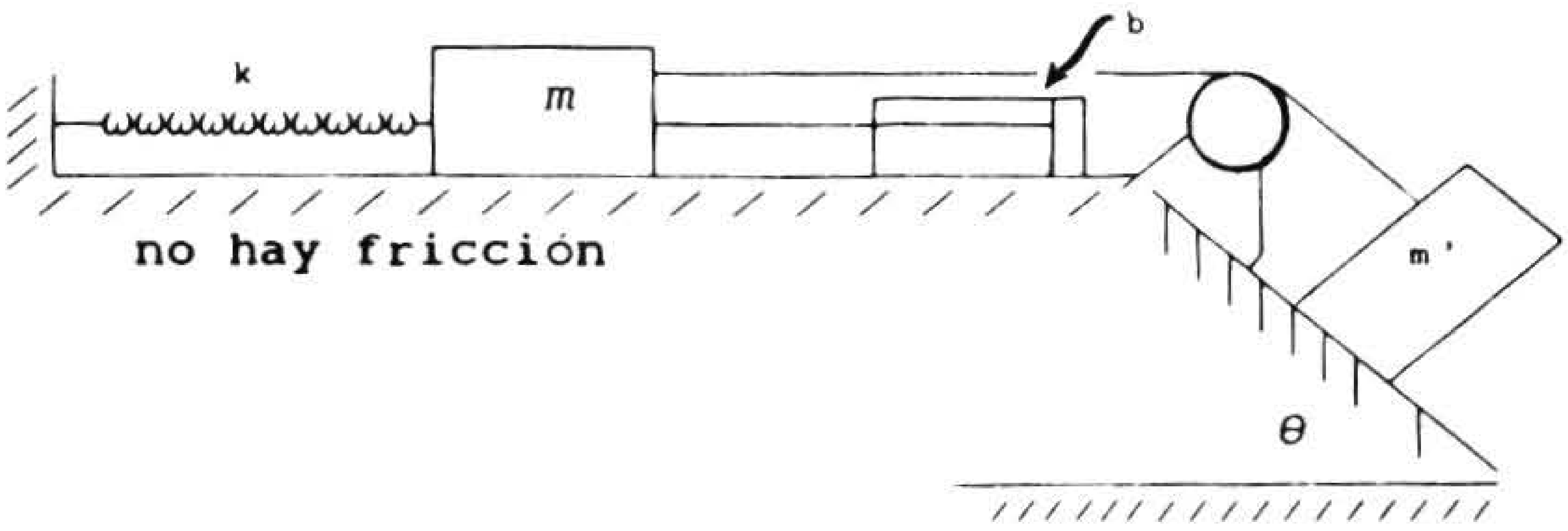
$$\frac{L}{g} = (5/3) (R/g) \qquad \Rightarrow \qquad L = (5/3) R.$$

$$\boxed{L = 0.67 \text{ m.}}$$

* * * **PROBLEMA # 32** * * *

Un bloque de masa m esta unido a un resorte de constante de restitución elástica k y a un amortiguador cuya constante de fuerza es b , como se presenta en la figura. Inicialmente se une con un bloque m' , se extiende el resorte hasta que se establece el equilibrio. Después de llegar al equilibrio se corta la cuerda que está uniendo los cuerpos m' y m lo cual tiene como consecuencia que se empiece a mover el cuerpo m. **a**). Considére que $b = 0$ (caso no amortiguado) y encuentre la *amplitud*, la *constante de fase*, *frecuencia angular* y el *período de movimiento de m*.
b). En otra situación $b = 9$ kg/s. Calcule la *frecuencia angular* y el *período de oscilación del cuerpo m*. Para el caso (**b**) calcule el *valor de la amplitud* después de haber efectuado *dos oscilaciones*.

FIGURA



DATOS	INCOGNITAS
$m = 3$ Kg	A , δ, ω , T
$K = 50$ N/m	ω', T'
$m' = 5$ Kg	A_{10}
$\theta = 30$ °	

SOLUCION

El primer caso de este tipo de movimiento es fácil de resolver ya que corresponde a un movimiento oscilatorio no amortiguado.
A partir de las condiciones establecidas para el problema, primeramente analizaremos el caso $b=0$ el cual corresponde al caso de movimiento libre de amortiguamiento.
Los diagramas de cuerpo libre, para los cuerpos que forman el sistema, son los siguientes; (**en la situación de equilibrio**):

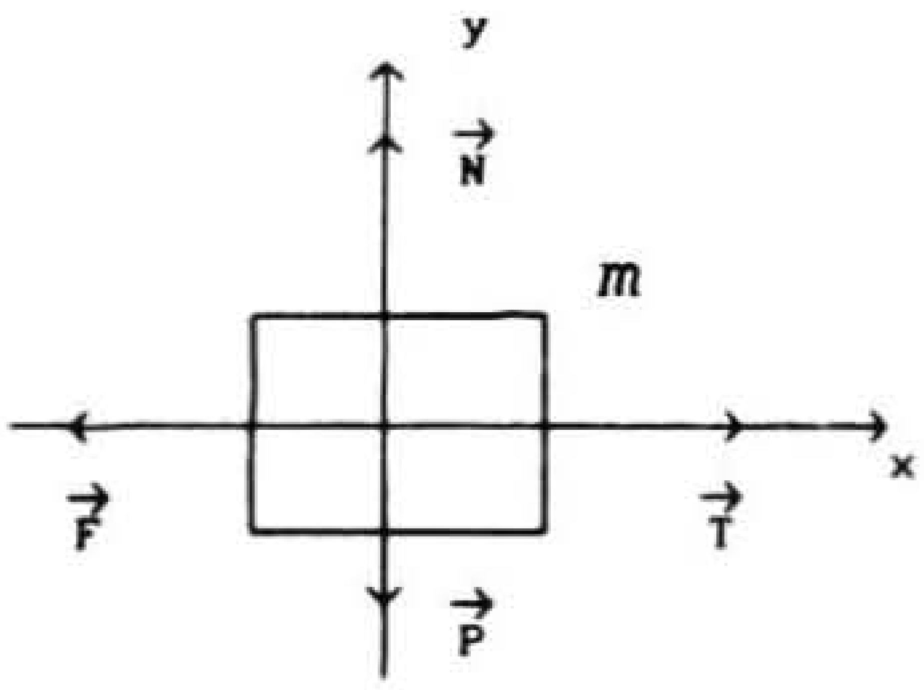


Diagrama de cuerpo libre para " m "

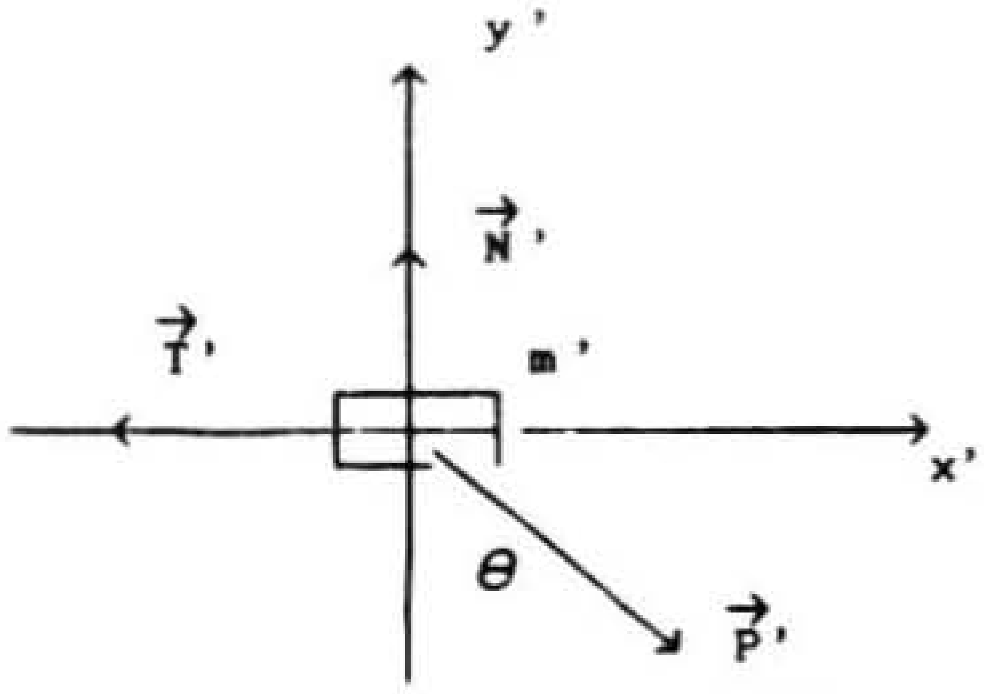


Diagrama de cuerpo libre para " m' "

$$\vec{F} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{P} = \vec{0} \qquad (1) \qquad\qquad \vec{T}' + \vec{N}' + \vec{P}' = \vec{0} \qquad (2)$$

De la ecuación (1) se tiene que:

$$T - F = 0 \Rightarrow T = F = k\, X_o$$

Y de la ecuación (2) tenemos

$$T' = P' \text{ sen } \theta$$

$$N' = P' \cos \theta$$

Además, por la tercera ley de Newton $T' = T$. Se tiene que:

$$T = F = k\, X_o = T' = P' \text{sen } \theta = m'g \text{ sen } \theta$$

$$\boxed{X_o = \frac{m' \; g \text{ sen } \theta}{k}}$$

Esta cantidad X_o corresponde a la posición inicial, que posee el bloque *m*, al ser deformado el resorte; y llevado a la posición de equilibrio.

Como se sabe, la ecuación de movimiento en el caso general de Movimiento Libre y Amortiguado está expresada por:

$$m \ddot{X} + b \dot{X} + k X = 0 \qquad (A)$$

Que para el caso particular, bajo estudio, se simplifica; por la condición $b = 0$, en

$$m \ddot{X} + k X = 0$$

Con las condiciones Iniciales siguientes:

$$X (t=0) = X_o$$

$$\dot{X} (t=0) = V_o = 0$$

La solución general de la ecuación de movimiento, está dada por

$$X (t) = X (t=0) \text{ sen } (\omega t + \delta)$$

Para contestar las preguntas planteadas por el problema procederemos de la siguiente manera; sustituyendo, las condiciones iniciales, en la solución de la ecuación de movimiento, encontramos:

$$X_0 = X\,(t=0)\ \text{sen}\,[\,(0)\,\omega + \delta\,]$$

$$V_0 = \omega\, X\,(t=0)\ \cos\,[\,(0)\,\omega + \delta\,]$$

$$V_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\,[\,(0) + \delta\,] = 0$$

$$\cos\,(\delta) = 0 \Rightarrow \delta = (2n+1)\,\pi/2\ ,\ n \in \mathbb{N}$$

Amplitud $$X\,(t=0) = A = \frac{m'g\ \text{sen}\ \theta}{k}$$

Constante de Fase

$$\delta = (2n+1)\ \pi/2$$

Frecuencia Angular $$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Periodo $$\tau = 2\,\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Para el caso $b \neq 0$, $b = 9$; la ecuación de movimiento (A) tiene como solución la siguiente expresión:

$$X\,(t) = X_m\ e^{-(b/2m)\,t}\ \text{sen}\,[\,\omega_A\, t + \phi\,] \qquad (B)$$

Primero determinaremos la constante de amortiguamiento crítico b_C, la cual está dada por :

$$b_c = 2\,m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\,m\,\omega_o \simeq 24$$

Así que, la relación que guardan b y b_c es

$$b_c > b$$

Lo que tiene como consecuencia que el movimiento sea de **tipo subamortiguado.**

Para este movimiento, se tiene que la frecuencia angular ω_A está dada por la siguiente expresión :

Frecuencia Angular

$$\omega_A^{\,2} = \omega^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2 \Rightarrow \omega_A = \omega\sqrt{1 - (b/bc)^2}$$

Período de Oscilación de Movimiento

$$\tau_A = \frac{2\pi}{\omega_A}$$

$$\boxed{\omega_A = 3.79\ \text{rad/s} \qquad \tau_A = 1.66\ \text{s}}$$

La última pregunta del problema tiene como respuesta lo siguiente:
El tiempo requerido para que se efectúen N oscilaciones, cuyo período de oscilación es τ, esta expresado por

$$t = N\,\tau$$

que para el caso particular bajo análisis es

$$\boxed{t = 2\,\tau_A = 3.316 \text{ s}}$$

Sustituyendo este valor de t y las condiciones iniciales en la solución de la ecuación de movimiento (B), obtenemos como resultado la amplitud del movimiento en dicho instante de tiempo.

$$X_o = X\,(t=0) = X_m\, e^{-0} \text{ sen } [\,(0)\,\omega_A + \phi\,] = X_m \text{ sen } \phi$$

$$X_m = \frac{X_0}{\text{sen } \phi} = \frac{m'g \text{ sen } \theta}{k \text{ sen } \phi}$$

Puesto que el movimiento se inicia del reposo $V_o = 0$, o sea que

$$\dot{X}\,(t)\Big|_{t=0} = X_m\,\left(\omega_A e^{-(b/2m)t}\cos[\omega_A t+\phi] - \frac{b}{2m}\, e^{-(b/2m)t}\text{sen}[\omega_A t + \phi]\,\right\}\Big|_{t=0}$$

$$0 = X_m\,\{\,\omega_A \cos\phi - (b/2m) \text{ sen } \phi\,\}$$

$$\therefore \quad \text{tang } \phi = \frac{2\,m\,\omega_A}{b}$$

$$\phi = \text{Arc . tang}\left(\frac{2\,m\,\omega_A}{b}\right).$$

$$\boxed{\phi = 1.19}$$

Finalmente, de la sustitución en (B), se encuentra

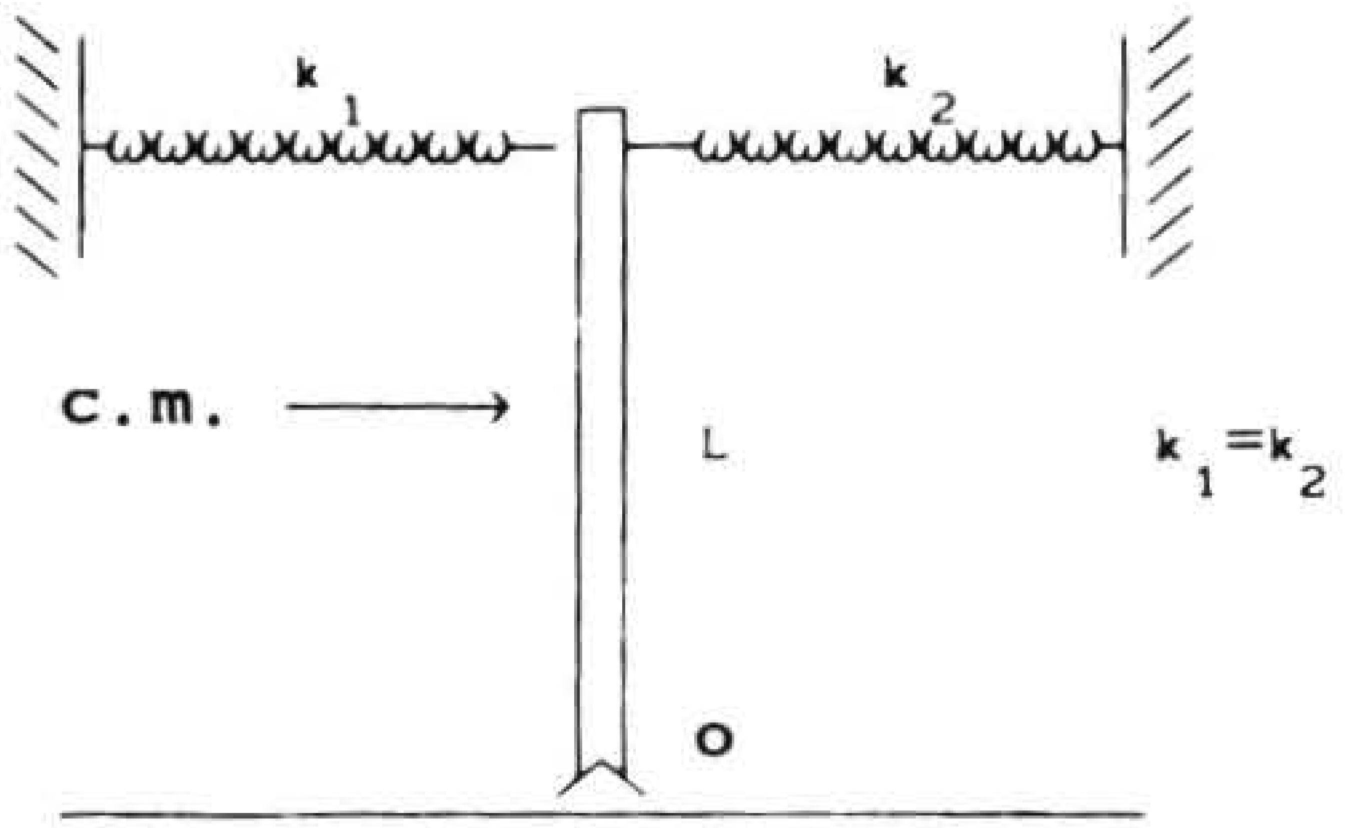
$$X\,(t=3.316) = \frac{m'g \text{ sen } \theta}{k \text{ sen } \phi}\, e^{-(1.5)(3.316)}\text{sen } (13.76)$$

$$\boxed{X(t=3.316) = 0.0388 \text{ m.}}$$

• • • PROBLEMA # 33 • • •

Para el sistema mostrado en la figura establezca su ecuación de movimiento. Supóngase que la fricción en el punto de apoyo y de suspensión es despreciable, y que los resortes son lineales e idénticos. Además considérese que las oscilaciones angulares son pequeñas. Determínese el período de las oscilaciones realizadas por el sistema en cuestión. La masa del sistema es M, su longitud es L y las constantes de los resortes son de valor k.

FIGURA



DATOS	INCOGNITAS
$M = 4$ kg	$T = ?$
$L = 3$ m	Ec. de Mov.
$k = 500$ n/m	

SOLUCION

Debido a que la barra esta apoyada respecto a un extremo de la misma y las fuerzas ejercidas por los resortes están aplicadas en el otro extremo de la misma, el momento de inercia que presenta es

$$I_O = I_{c.m.} + M r^2_{c.m.} = \frac{M L^2}{12} + M \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} M L^2$$

La descripción dinámica del sistema establece que la suma de fuerzas sobre la barra y la suma de torcas respecto al punto "o" son:

$$\vec{F}_T = \vec{F}_{k1} + \vec{F}_{k2} + \vec{P} + \vec{R} = M \vec{a}$$

$$\vec{\tau}_T = \vec{\tau}_F + \vec{\tau}_F + \vec{\tau}_P + \vec{\tau}_R = I^o \vec{\alpha}$$

Bajo las condiciones del problema se puede considerar que la barra no se traslada en promedio .

Las únicas fuerzas que producen torca respecto al punto "o" son $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, y $\vec{P}$.

Si la posición angular respecto a la posición de equilibrio se especifica con ϕ , la aceleración angular estará dada por:

$$\alpha = \frac{d^2\phi}{d\,t^2} = \ddot{\phi}$$

Por lo tanto, la ecuación de la dinámica rotacional se expresa como

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r} \times \vec{P} = I^{\circ}\,\vec{\alpha} = I^{\circ}\,\frac{d^2\phi}{d\,t^2}\,\hat{z}$$

En dicha expresión las fuerzas ejercidas por los resortes producen torcas idénticas en magnitud y dirección, por lo cual se tiene

$$2\,\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{P} = I^{\circ}\,\ddot{\phi}\,\hat{z}$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \begin{pmatrix} L\ \mathrm{sen}\phi \\ L\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2F_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2L\ F_1 \cos\phi \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} \times \vec{P} = \begin{pmatrix} L/2\ \mathrm{sen}\phi \\ L/2\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\ PL/2\ \mathrm{sen}\phi \end{pmatrix}$$

Luego entonces la suma de torcas respecto al punto "o" es

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L(\ -P/2\ \mathrm{sen}\phi + 2\ F_1 \cos\phi\ ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I^{\circ}\,\ddot{\phi} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$L\ (\ -\ P/2\ \mathrm{sen}\phi + 2\ F_1\ \cos\phi\ ) = I^{\circ}\,\ddot{\phi}\ .$$

En esta ecuación

$$F_1 = -\ k\ x \quad ,\ y \quad x = L\ \mathrm{sen}\ \phi.$$

Agrupando todos los términos, en un sólo miembro se tiene,

$$I^{\circ}\,\ddot{\phi} + LP/2\ \mathrm{sen}\phi + 2\ k\ L^2 \mathrm{sen}\phi\ \cos\phi = 0$$

$$I^{\circ}\,\ddot{\phi} + LMg/2\ \mathrm{sen}\phi + k\ L^2 \mathrm{sen}\ (2\phi) = 0$$

Pero bajo las condiciones de que las oscilaciones sean pequeñas se cumple que:

$$\text{sen}\ \phi \simeq \phi \qquad\qquad \text{sen}\ (\ 2\phi\ ) \simeq 2\phi$$

Sustituyendo en la ecuación encontrada, se tiene

$$I^{o}\ \ddot{\phi} + (\ L\ M\ g\ /2\ )\ \phi + k\ L^{2}(\ 2\ \phi\ ) = 0$$

Agrupando en un solo término lo que contiene a ϕ la ecuación se reduce a

$$I^{o}\ \ddot{\phi} + (\ L\ M\ g\ /2 + 2\ k\ L^{2})\ \phi = 0$$

$$\ddot{\phi} + [\frac{1}{I^{o}}\ (\frac{1}{2}\ g\ M\ L + 2\ k\ L^{2}\ )]\ \phi = 0$$

$$\ddot{\phi} + \omega^{2}\ \phi = 0$$

Ecuación de movimiento de un oscilador armónico simple , cuya frecuencia angular de oscilación es:

$$\omega^{2} = \frac{1}{I^{o}}\ (\ 1/2\ g\ M\ L + 2\ k\ L^{2}\ )$$

Ahora es posible determinar el período de oscilación del sistema en estudio , ya que se conoce cual es la relación entre el período y la frecuencia angular

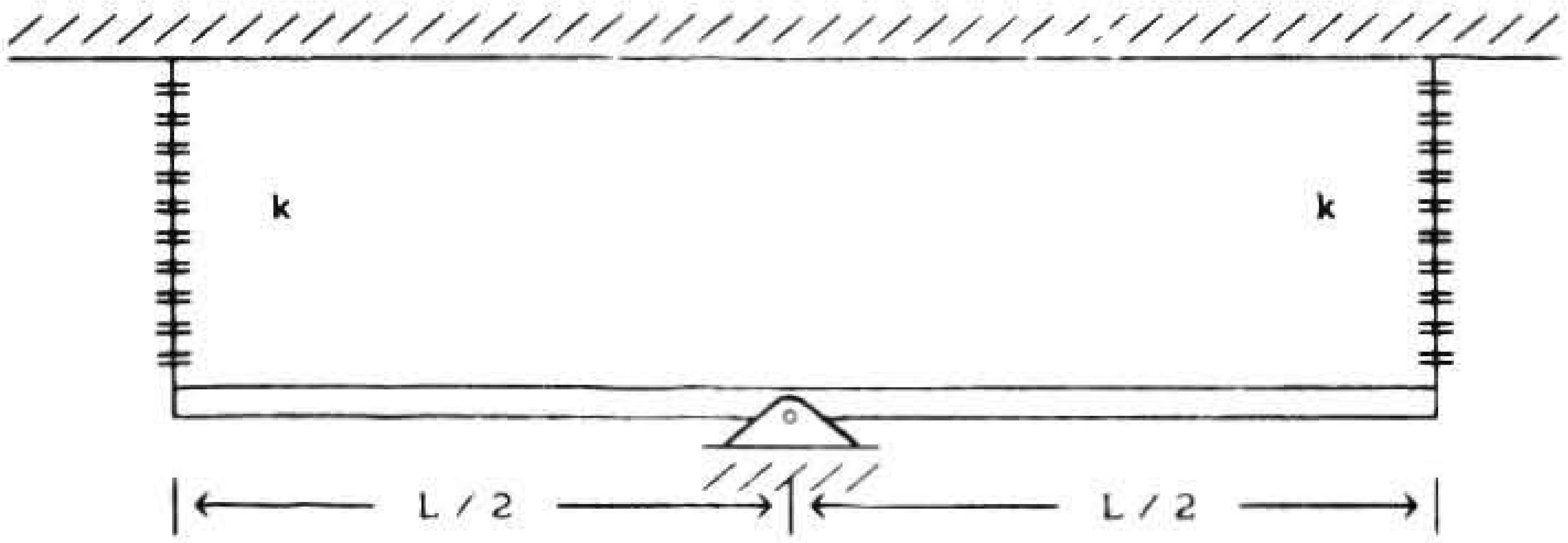
$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\ \pi\ \sqrt{\frac{I^{o}}{L\ (\frac{1}{2}\ M\ g + 2\ k\ L\ )}}$$

$$T = 2\ \pi\ \sqrt{\frac{M\ L}{3/2\ M\ g + 6\ k\ L}}$$

$$\boxed{T = 0.23\ \ \text{seg.}}$$

• • • PROBLEMA # 34 • • •

Establecer la ecuación de movimiento en la aproximación de pequeñas oscilaciones angulares de la barra que se muestra en la figura. *DETERMINAR* El período de movimiento.



FIGURA

DATOS	INCOGNITAS
M = masa de la barra = 2 k	ECUACION DE MOVIMIENTO
L = longitud de la barra = 2m.	PERIODO DE OSCILACION
k = constante elastica = 1000 N/m.	

Suponiendo que las compresiones y elongaciones experimentadas por los resortes, son en la dirección vertical, y que el ángulo girado por la barra es pequeño, se tendrá

$$\operatorname{sen}\theta \cong \theta$$

llamando a la deformación $\Delta \mathbf{y}$ tanto para la elongación como para la compresión , y refiriendo los momentos de torsión respecto al punto de suspensión, tenemos:

$$\vec{F}_T = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{P} + \vec{R}_A$$

$$\vec{\tau}_A = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2$$

Donde $\vec{\tau}_1 = \vec{\mathbf{r}}_1 \times \vec{\mathbf{F}}_1$ & $\vec{\tau}_2 = \vec{\mathbf{r}}_2 \times \vec{\mathbf{F}}_2$.

$$\vec{\mathbf{r}}_1 = \begin{pmatrix} L/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\mathbf{F}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -F_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\mathbf{r}}_2 = \begin{pmatrix} -L/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\mathbf{F}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ F_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Efectuando los productos vectoriales, para determinar las torcas se encuentra

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \begin{pmatrix} L/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ F_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L/2\ F_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -L/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -F_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L/2\ F_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\tau}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ L/2(F_1 + F_2) \end{pmatrix}$$

Por otro lado, de la dinámica rotacional, sabemos que

$$\vec{\tau}_A = \mathbf{I}_A\ \vec{\alpha} = \mathbf{I}_A\ \ddot{\theta}\ \hat{\alpha} = \mathbf{I}_A \frac{d^2\theta}{d\,t^2}\ \hat{\alpha} = 1/12\ m\ L^2\ \frac{d^2\theta}{d\,t^2}\ \hat{\alpha}$$

Ahora bien, las magnitudes de las fuerzas elásticas son iguales por la simetría de la disposición, lo cual implica

$$F_1 = F_2 = -\ k\ \Delta\ y$$

$$1/12\ m\ L^2\ \frac{d^2\ \theta}{d\ t^2}\ \hat{\alpha} = -\ k\ L\ \Delta\ y\ \hat{\mathbf{z}}$$

donde $\Delta\ y = L/2\ \theta$, con lo cual se tiene

$$1/12\ m\ L^2\ \frac{d^2\ \theta}{d\ t^2} = -\ k\ L\ (\ L/2\ \theta\ ) = -\ 1/2\ k\ L^2\theta$$

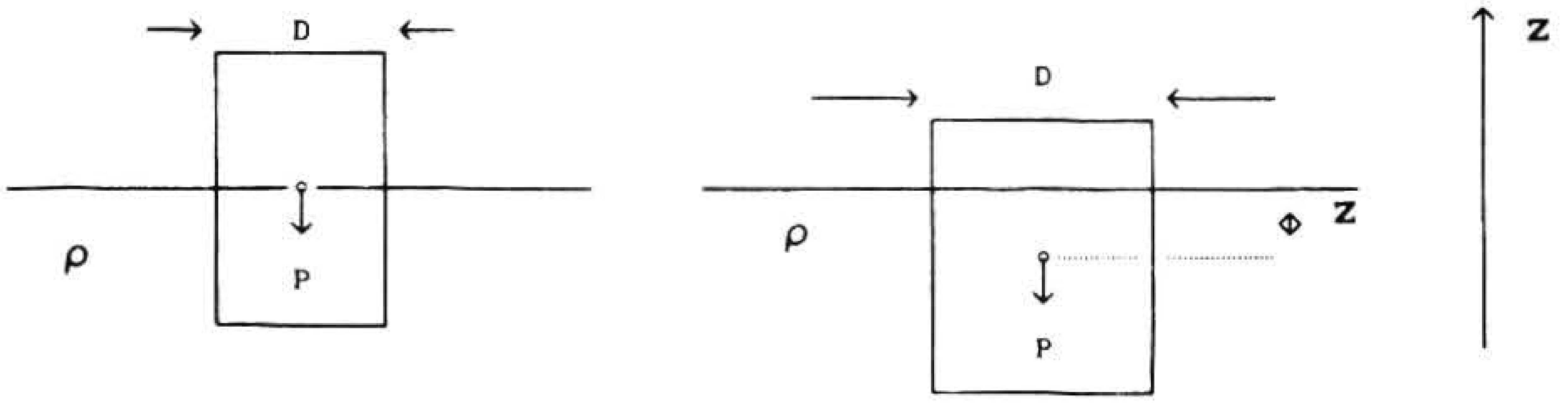
$$\frac{d^2\ \theta}{d\ t^2} + 6\ \frac{k}{m}\ \theta = 0$$

De la cual podemos determinar la frecuencia angular del movimiento

$\omega^2 = 6\ \frac{k}{m}\ \therefore\ \omega = \sqrt{6\ \frac{k}{m}} = 54.77 \text{rad/s.}$ $\boxed{T = 2\pi/\omega = 0.11 \text{ seg.}}$

• • • PROBLEMA # 35 • • •

Una boya cilíndrica de diámetro D está sumergida parcialment en un líquido (de densidad ρ) de modo que su eje permanece vertical. Se observa que si se empuja suavemente y se suelta adquiere un período de oscilación τ . Determínese el peso de la boya cilíndrica.



FIGURA

DATOS

$D = 0.2$ m.
$\rho = 62.4$ k/dm^3
$T = 2$ seg.
$g = 9.8$ m/s^2.

INCOGNITAS

$P = ?$

SOLUCION

Tomando como orígen de referencia del sistema, la intersección del eje del cilindro y la superficie del líquido cuando la boya está en equilibrio y considerando los desplazamientos hacia abajo como positivos. Sea **z** el desplazamiento de la boya en el instante t. Se sabe del principio de Arquímedes, que un cuerpo sumergido, parcial o totalmente, en un fluido experimenta un empuje hacia arriba igual al peso del fluido que se desaloja Luego la variación correspondiente en la fuerza de flotación es

$$\frac{1}{4}\,\pi\,D^2\,\rho\,\mathbf{z}$$

$$\frac{P}{g}\,\frac{d^2 z}{d\,t^2} = -\,\frac{1}{4}\,\pi\, D^2\,\rho\, \mathbf{z}$$

$$\frac{d^2 z}{d\,t^2} + \frac{\pi\, D^2\,\rho\, g}{4\,P}\,\mathbf{z} = 0$$

Donde P es el peso de la boya cilíndrica.
La solución de dicha ecuación diferencial está dada por

$$\mathbf{z}\ (t) = \mathbf{C}_1\ sen\ \left(\sqrt{\frac{\pi\, D^2\rho\, g}{4P}}\ \mathbf{t}\right) + \mathbf{C}_2\ cos\ \left(\sqrt{\frac{\pi\, D^2\rho\, g}{4P}}\ \mathbf{t}\right)$$

De donde la frecuencia angular del movimiento estará definida como:

$$\omega^2 = \frac{\pi\, D^2\rho\, g}{4\,P} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{\pi\, D^2\,\rho\, g}{4\,P}}$$

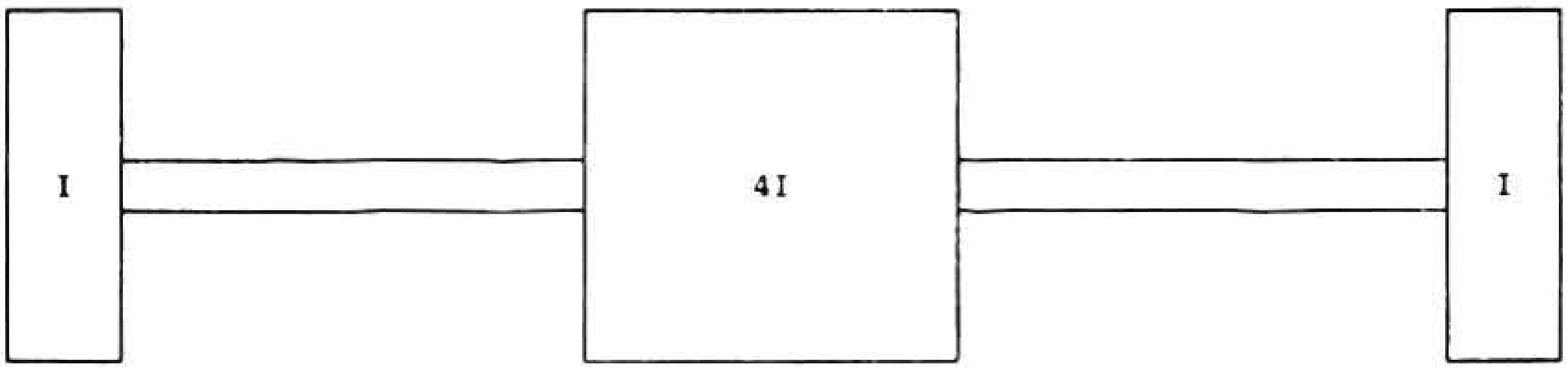
$$T = 2\pi/\omega = \sqrt{\frac{16\ \pi^2\ P}{g\ \pi\ \rho\ D^2}}$$

$$T = \mathbf{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{4} = (16\ \pi^2\ P/\ g\ \pi\ \rho\ D^2\ )$$

$$\boxed{P = \frac{D^2\ \rho\ g}{4\ \pi} = 973.26\ \mathbf{N.}}$$

* * * **PROBLEMA # 36** * * *

En un eje uniforme están montados tres discos, como se indica en la figura . El momento de inercia de cada disco en los extremos es I y el del centro es 4I . La constante de torsión del eje entre dos discos (el momento torsor necesario para producir una diferencia de desplazamiento angular de un radian) es κ *HALLAR:* El movimiento de los discos, si se le aplica un momento torsor igual a 2 τ_o sen ω t al disco localizado en el centro de este sistema, supóngase que inicialmente están en reposo los discos y no hay torsión sobre el eje.



FIGURA

SOLUCION

Supongamos que en el instante de tiempo **t**, el desplazamiento angular de los discos en los extremos es $\theta_1(t)$, **y** $\theta_2(t)$ en el central. Las diferencias de los angulos de torsión de los extremos de las piezas del eje , de izquierda a derecha son:

$$\kappa (\theta_1 - \theta_2) \ , \ \kappa (\theta_1 - \theta_2) - \kappa (\theta_2 - \theta_1) \ \ \& \ \ -\kappa (\theta_1 - \theta_2)$$

respectivamente. El momento total que actúa sobre una masa cuando gira es igual al producto del momento de inercia respecto al eje de rotación por su aceleración angular; luego entonces la ecuación de movimiento del disco central e

$$4 \ I \ \frac{d^2\theta_2}{d \ t^2} = \kappa(\theta_1 - \theta_2) - \kappa(\theta_2 - \theta_1) + 2 \ \tau_o \ \text{sen} \ \omega \ t \qquad (1)$$

o bien

$$(2 I D^2 + \kappa) \theta_2 = \kappa \theta_1 + \tau_o \text{sen } \omega t$$

y la de cualquier disco en los extremos es

$$I \frac{d^2\theta_1}{d t^2} = \kappa (\theta_2 - \theta_1) \qquad (2)$$

o bien

$$(I D^2 + \kappa) \theta_1 = \kappa \theta_2$$

Operando con $(2I D^2 + \kappa)$ sobre (2) y tomando en cuenta (1)

$$(2ID^2 + \kappa)(ID^2 + \kappa) \theta_1 = \kappa (2ID^2 + \kappa) \theta_2 = \kappa^2 \theta_1 + \tau_o \kappa \text{ sen } \omega t$$

de donde

$$D^2 (2 I^2 D^2 + 3 \kappa I) \theta_1 = \tau_o \kappa \text{ sen } \omega t \qquad (3)$$

Las raíces de la ecuación característica son 0, 0, αi, $-\alpha i$, donde $\alpha = \frac{3 \kappa}{2 I}$.

$$\theta_1(t) = C_1 + C_2 t + C_3 \cos \alpha t + C_4 \text{sen } \alpha t + \frac{\tau_o \kappa \text{ sen } \omega t}{I \omega^2 (2I\omega^2 - 3\kappa)} \qquad (4)$$

De la ecuación (2), tenemos, el desplazamiento θ_2

$$\theta_2 = (I/\kappa\, D^2 + 1) \theta_1$$

Por lo tanto

$$\theta_2(t) = C_1 + C_2 t + C_3 (1 - \frac{I}{\kappa} \alpha^2) \cos\alpha t + C_4 (1 - \frac{I}{\kappa} \alpha^2) \text{sen}\alpha t +$$

$$+ \frac{\tau_o \kappa - \tau_o \omega^2 I}{2 I^2 \omega^2 (\omega^2 - \alpha^2)} \text{ sen } \omega t \qquad (5)$$

De las ecuaciones (4) y (5) se obtiene (derivando),

$$\frac{d \theta_1}{d t} = C_2 - \alpha C_3 \text{sen}\alpha t + \alpha C_4 \cos\alpha t + \frac{\tau_o \kappa}{2 I^2 \omega (\omega^2 - \alpha^2)} \text{sen } \omega t \qquad (4')$$

$$\frac{d \theta_2}{d t} = C_2 - \alpha C_3 (1 - \frac{I}{\kappa} \alpha^2) \text{sen}\alpha t + \alpha C_4 (1 - \frac{I}{\kappa} \alpha^2) \cos\alpha t +$$

$$+ \frac{\tau_o \kappa - \tau_o \omega^2 I}{2 I^2 \omega (\omega^2 - \alpha^2)} \cos\omega t. \qquad (5')$$

Pero de acuerdo con, las condiciones iniciales en $t = 0$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$, $\frac{d\theta_1}{dt} = 0$, $\frac{d\theta_2}{dt} = 0$

se tiene $c_1 + c_3 = 0,$

$$c_1 + c_3\left(1 - \frac{I}{K}\alpha^2\right) = 0 \quad , \quad c_2 + c_4\alpha + \frac{\tau_o K}{2I^2\omega(\omega^2 - \alpha^2)} = 0$$

$$\& \qquad c_2 + c_4\alpha\left(1 - \frac{I}{K}\alpha^2\right) + \frac{\tau_o K - \tau_o\omega^2 I}{2I^2\omega(\omega^2 - \alpha^2)} = 0.$$

Luego, entonces se encuentra

$$c_1 = c_3 = 0, \quad c_4 = -\frac{\tau_o\,\omega}{3I\alpha(\omega^2-\alpha^2)} \quad , \quad c_2 = \frac{\tau_o}{3I\alpha} .$$

Sustituyendo estas expresiones en las soluciones θ_1 & θ_2 se tiene

$$\theta_1 = \frac{\tau_o}{3I}\left(\frac{t}{\omega} + \frac{\alpha^2 \operatorname{sen}\omega t}{\omega^2(\omega^2 - \alpha^2)} - \frac{\omega \operatorname{sen}\alpha t}{\alpha(\omega^2 - \alpha^2)}\right)$$

$$\theta_1 = \frac{\tau_o}{3I}\left(\frac{t}{\omega} + \frac{\alpha^3 \operatorname{sen}\omega t - \omega^3 \operatorname{sen}\alpha t}{\alpha\omega^2(\omega^2 - \alpha^2)}\right) \qquad \&$$

$$\theta_2 = \theta_1 - \frac{\tau_o(\alpha \operatorname{sen}\omega t - \omega \operatorname{sen}\alpha t)}{2I\alpha(\omega^2 - \alpha^2)}$$

Colección de problemas resueltos
para el curso de dinámica

Se terminó de imprimir en el mes de septiembre de 1996
en los talleres de la Sección de Impresión y Reproducción
de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco.
Se imprimieron 1000 ejemplares
más sobrantes para reposición.

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Ciencias Básicas
Coordinación de Extensión Universitaria
Sección Editorial

4000921 05253
12.00 - $12.00